Über eine besondere Classe
irrationaler Modulargleichungen
der elliptischen Functionen.

Inaugural-Dissertation

der

philosophischen Facultät

der

UNIVERSITÄT LEIPZIG

zur

Erlangung des Doctorgrades

vorgelegt von

Ernst Wilhelm Fiedler

aus Zürich.

Zürich

Druck von Zürcher & Furrer

1885.

Über eine besondere Classe
irrationaler Modulargleichungen
der elliptischen Functionen.

Inaugural-Dissertation
der
philosophischen Facultät
der
UNIVERSITÄT LEIPZIG
zur
Erlangung des Doctorgrades
vorgelegt von

Ernst Wilhelm Fiedler
aus Zürich.

Zürich
Druck von Zürcher & Furrer
1885.

Inhaltsverzeichnis.

Separatabdruck aus dem XXX. Bande (p. 129) der Vierteljahrsschrift der Zürcher Naturforschenden Gesellschaft.

An die Lehre von den *Modulargleichungen* schliesst die moderne Auffassung der elliptischen Modulfunctionen als naturgemässe Fortsetzung eine Theorie der *Modularcorrespondenzen.*

Nach dem *Programm,* welches Herr Klein in der Note: «Zur Theorie der elliptischen Modulfunctionen»*) entwickelt hat, sind den gewöhnlichen Modulargleichungen zwischen $\varkappa^2$, λ^2 einmal andere, als völlig analoge, zur Seite zu stellen, welche aus der Transformation sogenannter *Hauptmoduln* entspringen. Sind aber ferner M_1, $M_2, \ldots$ *die Moduln eines zur* ϱ. *Stufe gehörigen vollen Systems, so findet zwischen* $M_1, M_2, \ldots$ *einerseits und den transformirten Werten* $\overline{M}_1, \overline{M}_2, \ldots$ *anderseits, für jeden zu* ϱ *relativ primen Transformationsgrad, ein Entsprechen statt, welches nach Grad, Galois'scher Gruppe und Vertauschbarkeit der Argumente mit den eigentlichen Modulargleichungen für dasselbe* ϱ *übereinstimmt.* Dieses Entsprechen ist, da den zwischen den Moduln des Systems bestehenden algebraischen Relationen Rechnung getragen werden muss, in geometrischer Deutung eine *Correspondenz auf einer Grundcurve höheren Geschlechtes.*

---

*) Math. Ann. XVII p. 62. Bezüglich der Terminologie sei auf diese und die weiter zu citirenden Abhandlungen von Klein, Gierster, Hurwitz, Dyck verwiesen.

Diese *Modularcorrespondenzen* haben im Anschluss an die citirte Note eine eingehende Bearbeitung zuerst durch Herrn Gierster*) gefunden, namentlich nach der gruppen- und functionentheoretischen Seite hin. Das Ziel seiner Untersuchungen war, *Classenzahlrelationen höherer Stufe* aufzustellen. Die Verwendung der Modularcorrespondenzen beruht auf der Bemerkung, dass den Coincidenzen derselben die Classen der quadratischen Formen negativer Determinante in bestimmter Weise zugeordnet werden können. Die fraglichen Relationen entspringen dann aus einer doppelten Abzählung dieser Coincidenzen, einer arithmetischen und einer algebraischen.

Die dabei unerledigt gebliebene Frage nach der *algebraischen Darstellung der Modularcorrespondenzen* entschied in principieller Hinsicht Herr Hurwitz**) durch Entwickelung einer transcendenten Methode, die sich auf das Studium der *überall endlichen Integrale der Grundcurve*, als einer allgemeineren Art von Modulfunctionen, und der zugehörigen θ-Functionen gründet. Einerseits dienen die Entwickelungscoefficienten dieser Integrale wiederum zur Aufstellung von Classenzahlrelationen, anderseits führt das Abel'sche Theorem zu Kriterien und transcendenten Bildungsmitteln der algebraischen Definitionsformen. Die neueste Abhandlung***) formulirt das

---

*) Math. Ann. XVII p. 74, XXI p. 1. „Ueber Relationen zwischen Classenzahlen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante."

**) Göttinger Nachr. 1883 p. 350. „Zur Theorie der Modulargleichungen." Math. Ann. XXV p. 157. „Ueber Relationen zwischen Classenzahlen binärer quadr. Formen von negativer Determinante."

***) Ber. d. k. sächs. Ges. d. W. 1885 p. 222. „Ueber die Classenzahlrelationen und Modularcorrespondenzen primzahliger Stufe."

diesbezügliche Hauptresultat folgendermassen: *Vereinigt man die Modularcorrespondenz eines beliebigen Transformationsgrades n mit gewissen festen Modularcorrespondenzen der Grade* $n_\varkappa$, *letztere je in bestimmter Multiplicität genommen, so lassen sich diese Correspondenzen zusammen durch eine einzige Gleichung* $\varphi_n(\omega', \omega) = 0$ *definiren, deren linke Seite eine algebraische Function von* ω', ω *auf der Riemann'schen Fläche der Stufe ist.* Dabei handelt es sich, wie man sieht, nur um *die Existenz und die allgemeine Form* einer zur Definition hinreichenden Gleichung, nicht aber um die wirkliche Bildung derselben auf algebraischem Wege.

Ist jedoch im Falle eines gegebenen Modulsystems über diese Vorfragen entschieden, so erscheint der Versuch zweckmässig, zur *wirklichen Herstellung der Definitionsgleichung*, gewisse fundamentale und characteristische Eigenschaften der Correspondenz zu verwerten. Diese bestehen darin, dass *eine Modularcorrespondenz ungeändert bleibt, wenn man ihre entsprechenden Elemente erstens einer gewissen Gruppe linearer simultaner Transformationen und zweitens bestimmten Vertauschungen unterwirft.* Ein darauf gegründetes Verfahren wird als ein in gewissem Sinne *invariantentheoretisches* bezeichnet werden dürfen. Auf Anregung von Herrn Klein, in dessen Note (l. c.) sich der Grundgedanke schon ausgesprochen findet, nahm ich dieses Problem in den nächstliegenden concreten Fällen in Angriff.

Auf diese wichtige Abhandlung allgemeineren Characters konnte ich im Texte nicht gebührend Bezug nehmen, da sie erst nach Abschluss der Arbeit im Druck erschien; die Kenntnis ihrer Resultate verdankte ich den gütigen Mitteilungen von Herrn Prof. Hurwitz.

Schon lange beanspruchten neben den gewöhnlichen Modulargleichungen zwischen $\sqrt[4]{\varkappa}$, $\sqrt[4]{\lambda}$ die sogenannten *Modulargleichungen in irrationaler Form* ein besonderes Interesse dadurch, dass dieselben Umformungen der ersteren mittelst der Relationen $\varkappa^2 + \varkappa'^2 = 1$, $\lambda^2 + \lambda'^2 = 1$ oft in ausserordentlich einfacher Gestalt darstellen. Alt bekannte vereinzelte Fälle sind die berühmte Legendre'sche und die Gützlaff'sche Gleichung. Eine grössere Zahl von Beispielen leitete dann Herr Schröter*) aus einer allgemeinen Formel für das Product zweier θ-Functionen her. Doch ist diese rein rechnerische Methode insofern theoretisch unzureichend, als sie nicht aus dem Wesen dieser Gleichungen entspringt, daher auch keinen Einblick in die notwendige algebraische Structur ihrer, oft in zufälliger Form erscheinenden, Resultate gewährt.

Man wird so vor allem auf das Studium derjenigen Correspondenzen geführt, welche zwischen dem *Modulpaar* $\sqrt[4]{\varkappa}, \sqrt[4]{\varkappa'}$ und dem durch Transformation entstehenden $\sqrt[4]{\lambda}, \sqrt[4]{\lambda'}$, sowie zwischen den Quadraten dieser Moduln bestehen. Im allgemeinen definirt aber, wie man sich leicht überzeugt, eine Gleichung zwischen diesen Modulpaaren, zusammen mit obigen Relationen, ausser denjenigen Wurzelpaaren $\sqrt[4]{\lambda}, \sqrt[4]{\lambda'}$, welche aus dem Transformationsproblem entspringen, noch gewisse fremde, d. h. in der gewöhnlichen Modulargleichung nicht enthaltene, Wurzelpaare. *Algebraisch zeichnen sich also diejenigen Fälle aus, in denen die irrationale Modulargleichung, zusammen mit den Relationen, das genaue Aequivalent der*

*) De aequationibus modularibus, Regiom. 1854.

gewöhnlichen Modulargleichung bildet, in denen daher eine einzige Gleichung zwischen den Modulpaaren zur vollständigen Definition der zugehörigen Modularcorrespondenz ausreicht. Geometrisch ist der besondere Ausdruck dafür die Existenz einer *Schnittsystem-Correspondenz*, die dadurch Interesse gewinnt, dass sie schon durch ihre oben angedeuteten Haupteigenschaften im wesentlichen characterisirt ist.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich nun mit der Theorie der so umschriebenen *besonderen Classe irrationaler Modulargleichungen der angegebenen Modulsysteme 16. und 8. Stufe.* Da zur Bildung algebraischer Gleichungen zwischen mehreren Reihen algebraisch verbundener Grössen keine allgemeinen Methoden bekannt sind, habe ich die erforderlichen Hilfsmittel aus dem Wesen des concreten, sehr übersichtlichen Problems auf elementarem Wege zu entwickeln gesucht. Die leitenden Gesichtspunkte bietet die *geometrische Einkleidung.*

Der Gang der Untersuchung ist in kurzem folgender. Im I. Capitel wird nach den bekannten Principien der Theorie der Modulfunctionen*) die *Congruenzgruppe* der ω-Substitutionen, welche zu dem Modulsystem $\sqrt[4]{\varkappa}$, $\sqrt[4]{\varkappa'}$ gehört, und algebraisch die *Grundcurve* als das geometrische Substrat der Interpretation untersucht. Im II. Capitel wird das *Transformationsproblem* des Modulsystems und der geometrische Ausdruck desselben durch Correspondenzen im Anschluss an die Gierster'schen Arbeiten betrachtet, und die *Fragestellung* für die besondere Classe der Schnittsystem-Correspondenzen präcisirt. Das III.

---

*) Vgl. Hurwitz, Grundlagen einer independenten Theorie der elliptischen Modulfunctionen. Math. Ann. XVIII p. 528.

Capitel liefert für dieselbe die notwendigen und hinreichenden *zahlentheoretischen Kriterien*, gestützt auf eine functionentheoretische Untersuchung der Integrale erster Gattung der Grundcurve nach den Hurwitz'schen Methoden. Im IV. Capitel handelt es sich um die im angedeuteten Sinne *invariantentheoretische Construction* der Gleichungsform aus den angeführten Fundamentaleigenschaften der Correspondenz, indem auf directem Wege *das volle System der Simultaninvarianten* aufgestellt wird. Damit ist den im V. Capitel zusammengestellten, grossenteils neuen *Resultaten* die notwendige, durchsichtige Structur gesichert.

Herr Klein hatte die Güte, diese Resultate, in vorläufiger Fassung, schon im III. Teil einer am 2. März c. der kgl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften vorgelegten Note «Neue Untersuchungen über elliptische Modulfunctionen der niedersten Stufen» zu publiciren.*)

Ich ergreife gern auch an dieser Stelle die Gelegenheit, meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. F. Klein, meinen aufrichtigen Dank für die Förderung auszusprechen, die er meinen Untersuchungen angedeihen liess.

**) Eine analoge Durchführung für *Correspondenzen 7. Stufe* hoffe ich demnächst veröffentlichen zu können. Ferner bleiben nun analoge Betrachtungen auch auf solche Correspondenzen auszudehnen, deren Gleichung noch *unbestimmte Parameter* enthalten muss, um zur vollständigen Definition auszureichen.

Leipzig, Anfang Mai 1885.

I. Capitel.

Das Modulsystem $\varphi = \sqrt[4]{\varkappa}$, $\psi = \sqrt[4]{\varkappa'}$.

---

§ 1.

Die Congruenzmoduln 16. Stufe φ, ψ.

Die Productdarstellung der elliptischen Integralmoduln $\varkappa^2, \varkappa'^2$ führt zur Untersuchung der achten Wurzeln aus denselben, der von **Hermite** so bezeichneten Functionen

$$\varphi = \sqrt[4]{\varkappa}, \quad \psi = \sqrt[4]{\varkappa'}, \tag{1}$$

welche durch die wohlbekannte Relation verknüpft sind

$$\varphi^8 + \psi^8 = 1. \tag{2}$$

Ist das *Periodenverhältnis* des zugehörigen elliptischen Integrals ω und $q = e^{i\pi\omega}$, so treten die Producte auf

$$\left.\begin{array}{c} \Pi_1 = \prod\limits_{\nu=1}^{\infty}(1+q^{2\nu}), \quad \Pi_2 = \prod\limits_{\nu=1}^{\infty}(1-q^{2\nu-1}), \quad \Pi_3 = \prod\limits_{\nu=1}^{\infty}(1+q^{2\nu-1}), \\ \Pi_4 = \prod\limits_{\nu=1}^{\infty}(1-q^{2\nu}). \end{array}\right\} \tag{3}$$

Nimmt man $q^{\frac{1}{8}} = e^{\frac{i\pi\omega}{8}}$ und $\sqrt{2}$ positiv, so lässt sich eines jener Paare achter Wurzeln *eindeutig* darstellen als

$$\varphi(\omega) = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{8}} \frac{\Pi_1}{\Pi_3}, \quad \psi(\omega) = \frac{\Pi_2}{\Pi_3}. \tag{4}$$

Auch soll, einer Multiplication von Zähler und Nenner mit $\sqrt{\Pi_4}$ entsprechend, mit 4) gleichbedeutend gebraucht werden

$$\varphi(\omega) = \sqrt{\frac{\theta_2(0,\omega)}{\theta_3(0,\omega)}}, \quad \psi(\omega) = \sqrt{\frac{\theta_0(0,\omega)}{\theta_3(0,\omega)}}. \tag{5}$$

Als eindeutige analytische Functionen des Argumentes ω gehören die so definirten $\varphi(\omega)$, $\psi(\omega)$ zu den *elliptischen Modulfunctionen*, deren Theorie von ihrem Verhalten bei den *linearen ω-Substitutionen* ausgeht.

Linear heisst die Substitution

$$\omega' = S(\omega) = \frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega} \text{ oder kurz } S = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}, \tag{6}$$

wenn $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen sind von der Determinante

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1. \tag{7}$$

Nach bekannter Terminologie bilden die linearen Substitutionen S eine *Gruppe* (S), deren *erzeugende Substitutionen* sind

$$\mathsf{S}(\omega) = \omega + 1, \quad \mathsf{T}(\omega) = \frac{-1}{\omega}; \tag{8}$$

durch Wiederholungen und Zusammensetzungen von S und T entstehen also sämmtliche Substitutionen S, wobei in dem symbolischen Product $S_1\, S_2 \ldots S_k(\omega)$ die Operationen in der Reihenfolge von links nach rechts an ω vorzunehmen sind.

Durch die Eigenschaft, bei den linearen ω-Substitutionen ungeändert zu bleiben, ist die *absolute Invariante* $J(\omega)$ des Integrals erster Gattung ausgezeichnet. Umgekehrt heissen alle zu demselben Wert von J gehörigen Argumente ω vermöge linearer Substitutionen *äquivalent.*

Die Aenderungen der Hermite'schen Functionen bei den Erzeugenden S und T folgen unmittelbar aus der Definition als

$$\left.\begin{aligned} \varphi(\omega+1) &= e^{\frac{i\pi}{8}} \frac{\varphi(\omega)}{\psi(\omega)}, \quad \psi(\omega+1) = \frac{1}{\psi(\omega)} \\ \varphi\left(\frac{-1}{\omega}\right) &= \psi(\omega), \quad \psi\left(\frac{-1}{\omega}\right) = \varphi(\omega). \end{aligned}\right\} \quad 9)$$

Nach den allgemeinen Formeln für $\varphi(S(\omega))$, die Hermite daraus abgeleitet hat*), bleiben φ, ψ nur dann bis auf constante Factoren *ungeändert*, wenn in S α, δ ungerade, β, γ gerade Zahlen sind; es ist nämlich

$$\varphi\left(\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}\right)=\left(\frac{2}{\delta}\right)e^{\frac{i\pi}{8}\gamma\delta}\varphi(\omega),\ \psi\left(\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}\right)=\left(\frac{2}{\alpha}\right)e^{-\frac{i\pi}{8}\alpha\beta}\psi(\omega), \quad 10)$$

unter

$$\left(\frac{2}{\delta}\right) = (-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}}, \quad \left(\frac{2}{\alpha}\right) = (-1)^{\frac{\alpha^2-1}{8}} \quad 11)$$

das *Jacobi'sche Zeichen* verstanden. Demnach ist nur dann $\varphi(S(\omega)) = \varphi(\omega)$, wenn neben 7)

$$\gamma\delta + \delta^2 - 1 \equiv 0, \text{ also } \gamma\delta \equiv 0 \text{ oder } 8 \text{ mod. } 16,$$

ebenso $\psi(S(\omega)) = \psi(\omega)$, wenn

$$-\alpha\beta + \alpha^2 - 1 \equiv 0, \text{ also } \alpha\beta \equiv 0 \text{ oder } 8 \text{ mod. } 16. \quad 12)$$

Da somit die Coefficienten der linearen Substitutionen, bei welchen φ, ψ ungeändert bleiben, Congruenzbedingungen modulo 16 unterliegen, so sind die *Hermite'schen Functionen* nach der Klein'schen Bezeichnung *Congruenzmoduln 16. Stufe.*

Der vorliegenden Untersuchung sollen φ *und* ψ *als völlig gleichberechtigte Elemente* zu Grunde gelegt werden.

---

*) Hermite: „Sur la résolution de l'équation du 5. degré", Comptes Rendus T. 46 p. 511.

Wir betrachten also vor allem stets das System der beiden Congruenzmoduln, und fragen zuerst nach den S, bei welchen dieses sich nicht ändert. Dazu muss S beiden Bedingungen 12) gleichzeitig genügen, und diese liefern die gemeinsamen Lösungen

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha \equiv k,\ \delta \equiv k\ \ \ \ \ \ \ ,\ \beta \equiv \gamma \equiv 0 \text{ mod. } 16,\ \left(\frac{2}{k}\right) = +1, & \text{a)} \\ \alpha \equiv h,\ \delta \equiv h+8,\ \beta \equiv \gamma \equiv 8 \text{ mod. } 16,\ \left(\frac{2}{h}\right) = -1, & \text{b)} \end{array}\right\} \quad 13)$$

oder, unter l eine beliebige Zahl verstanden,

$$\alpha \equiv 2l+1,\quad \delta \equiv \frac{1}{2l+1},\quad \beta \equiv \gamma \equiv 4l(l+1) \text{ mod. } 16. \qquad 14)$$

Also bilden φ, ψ *ein System von Congruenzmoduln 16. Stufe*, welches dann und nur dann bei $S(\omega)$ unveränderlich ist, wenn die Coefficienten von S den Congruenzen 13 a) oder 13 b) genügen.

Offenbar bilden ebenso φ^2, ψ^2 *ein System von Congruenzmoduln 8. Stufe*, für deren Substitutionen die Bedingungen 13) zusammenfallen in

$$\alpha \equiv \delta \equiv k,\quad \beta \equiv \gamma \equiv 0 \text{ mod. } 8,\quad (k \text{ ungerade}). \qquad 15)$$

§ 2.

Die erweiterte Congruenzgruppe 16. Stufe.

Jede lineare Substitution, deren Coefficienten 13 a) genügen, möge als eine Substitution T bezeichnet werden. Dann bildet die Gesammtheit der T eine Gruppe (T), d. h. alle $T_1^r\, T_2^s \ldots$ genügen denselben Congruenzen, und zwar ist die Gruppe in der Gesammtgruppe (S) als eine *ausgezeichnete Untergruppe* enthalten, da auch alle mit-

telst S transformirten Substitutionen STS^{-1} wieder zur Gruppe (T) gehören. Im folgenden soll nun *diese Gruppe* (T) *schlechthin als die Congruenzgruppe 16. Stufe* benannt werden.*)

Nach dieser Festsetzung sollen zwei Substitutionen *S und S' modulo 16 congruent* heissen und geschrieben werden als

$$\left.\begin{array}{l} S \equiv S' \text{ oder } \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \gamma' & \delta' \\ \alpha' & \beta' \end{pmatrix} \text{ mod. } 16, \\ \text{wenn} \\ \alpha \equiv k\alpha', \; \beta \equiv k\beta', \; \gamma \equiv k\gamma', \; \delta \equiv k\delta', \; k^2 \equiv 1 \text{ mod. } 16. \end{array}\right\} \quad 16)$$

Alle congruenten Substitutionen S, S' sind in der Form enthalten $S' = ST$, und umgekehrt existirt, wenn 16) gilt, immer eine Substitution T, welche der Gleichung genügt $S' = ST$.

Dagegen bilden die zu 13b) gehörigen Substitutionen, deren gemeinsame Benennung V sein soll, für sich keine Gruppe, vielmehr liefert die Zusammensetzung zweier V stets eine Substitution T und die Producte TV und VT sind immer Substitutionen V, nach den bekannten Multiplicationsregeln für das Jacobi'sche Zeichen. Daher bilden aber die Substitutionen T und V, zusammengenommen, wiederum eine *Gruppe* (T, V), welche nun die *erweiterte Congruenzgruppe 16. Stufe* genannt werden mag. Auch diese ist eine in (S) ausgezeichnete Untergruppe, denn es ist $\mathbf{S}V\mathbf{S}^{-1} \equiv V$, $\mathbf{T}V\mathbf{T} \equiv V$ mod. 16. Alle V werden somit

*) Streng genommen kommt diese Bezeichnung zwar nur derjenigen Untergruppe von (T) zu, in welcher $k = \pm 1$, aber ein Zusatz mag hier wegfallen, da die engere Gruppe weiterhin nicht besonders zu betonen sein wird (vgl. Klein, Ber. d. k. sächs. G. d. W. 1884 p. 61).

erhalten, indem man in der Congruenzgruppe (T) an Stelle der Identität eine specielle Substitution V setzt, z. B.

$$\mathsf{V} = (\mathsf{T}\mathsf{S}^{-2})^2(\mathsf{T}\mathsf{S}^2)^2 \text{ oder } \mathsf{V}(\omega) = \frac{8+5\omega}{13+8\omega}. \qquad 17)$$

Zwei Zahlen ω, ω' sind daher in Bezug auf die durch 14) definirte Gruppe (T, V) *relativ äquivalent*, wenn eine der Congruenzen besteht

$$\omega' \equiv \omega, \quad \omega' \equiv \mathsf{V}(\omega) \text{ mod. } 16. \qquad 18)$$

Man pflegt*) elliptische, parabolische und hyperbolische Substitutionen S zu unterscheiden, je nach der Realität der bei S unveränderlichen Argumente, d. h. der Wurzeln von

$$\beta\omega^2 + (\alpha - \delta)\omega - \gamma = 0, \text{ also je nachdem } (\alpha+\delta)^2 \lesseqgtr 4.$$

(Bei elliptischem S bleiben in jeder Halbebene (vgl. p. 13) ein, bei parabolischem ein und bei hyperbolischem zwei Punkte der reellen Axe fest.) Hiernach enthält die *Gruppe* (T, V) *nur hyperbolische Substitutionen ausser den parabolischen*

$$\mathsf{S}^{16k}(\omega) = \omega + 16k, \quad \mathsf{T}\mathsf{S}^{16k}\mathsf{T}(\omega) = \frac{\omega}{1 - 16k\omega}. \qquad 19)$$

Die Anzahl der im Sinne von 16) incongruenten Substitutionen ist für die Stufenzahl $s = 2^\varrho > 4$ nach bekannter Formel**) $3 . 2^{3\varrho - 4}$. Aber die modulo 16 incongruenten Substitutionen sind noch paarweise vermöge V relativ äquivalent; also ist bei unserer Festsetzung für $s = 16$ *die Zahl der relativ inäquivalenten Substitutionen*

*) Klein, Math. Ann. XIV p. 123.

**) Hurwitz, Grundlagen. Math. Ann. XVIII p. 540.

$$r = \frac{3 \cdot 2^8}{2} = 384. \qquad 20)$$

Die nach 15) gebildete Congruenzgruppe 8. Stufe enthält

$$r = 3 \cdot 2^5 = 96 \qquad 21)$$

incongruente und relativ inäquivalente Substitutionen.

Ordnet man die linearen Substitutionen so in *r Classen*, dass je zwei Angehörige derselben Classe relativ äquivalent sind, und greift man aus jeder eine Substitution W_k heraus, so bilden $W_1, W_2, \ldots W_r$ ein volles System relativ inäquivalenter Substitutionen. Betrachtet man jedes W_k lediglich als Vertreter der k. Classe, so bilden die W_k in diesem Sinne eine *Gruppe G von r Substitutionen.* Zu jeder Substitution der Gesammtgruppe (S) gehört nun ein bestimmtes W_k von G.

§ 3.

Die Riemann'sche Fläche der erweiterten Congruenzgruppe.

Es ist durch zahlreiche neuere Arbeiten allgemein bekannt, in welcher Weise bei der Gauss'schen Interpretation der complexen Variabelen ω in der Ebene *die Gruppe* (S) *eine Einteilung der positiven Halbebene in äquivalente Kreisbogendreiecke* begründet, derart, dass jedes Dreieck nach p. 8 zugleich die ganze J-Ebene abbildet. Jedes Dreieck werde nach der Substitution S benannt, durch welche es aus dem *Fundamentaldreieck mit den Ecken* $\omega = i\infty$, ϱ, ϱ^2 $(\varrho^3 = 1)$ hervorgeht. Dieses wird durch die Symmetrielinie $i, i\infty$, jedes andere Dreieck S durch $S(i)$, $S(i\infty)$ in zwei *Elementardreiecke* zerlegt, die, den Halbebenen J entsprechend, als schraffirt

und nicht-schraffirt unterschieden zu werden pflegen; zur Begrenzung eines Dreiecks zählen nur die äusseren Kanten *eines* seiner Elementardreiecke.

Den r Substitutionen W_k entsprechend, gibt es nur r relativ inäquivalente Dreiecke; man kann sie insbesondere so wählen*), dass sie ein einfach zusammenhängendes Gebiet, *das Fundamentalpolygon der Congruenzgruppe s. Stufe* bilden. Innerhalb desselben entspricht jedem gegebenen ω-Werte eine bestimmte Stelle, umgekehrt entsprechen aber jeder solchen Stelle alle relativ äquivalenten Argumente. Das Polygon wird sich in $2r$ Elementardreiecke *regulär* eingeteilt erweisen, d. h. derart, dass von den Elementardreiecken

$$\left.\begin{array}{llll} \text{in } \frac{r}{s} \text{ } \textit{Eckpunkten} & J = \infty & \text{oder } \omega = S(i\infty) & \text{je } 2s \\ \frac{r}{3} & J = 0 & \omega = S(\varrho) & 6 \\ \frac{r}{2} & J = 1 & \omega = S(i) & 4 \end{array}\right\} \quad 22)$$

zusammenstossen. Von der Begrenzung ist wiederum nur die Hälfte zum Polygon zu rechnen, denn die *Kanten sind paarweise gebunden durch die erzeugenden Substitutionen der erweiterten Congruenzgruppe*, da deren Combination und Iteration die Ebene lückenlos mit Reproductionen des Polygons überdeckt.

Vereinigt man die gebundenen Kantenpaare dadurch, dass man das Polygon im Raume wirklich dehnt und biegt, so entsteht eine geschlossene Fläche, welche nach Herrn Klein als die *Riemann'sche Fläche der Gruppe s. Stufe* zu kennzeichnen ist. Sie ist mehrfach zusammen-

*) Hurwitz, Grundlagen § 3.

hängend, so dass die Randcurve des Polygons als ein *System von Rückkehrschnitten und Querschnitten* aufzufassen ist, welche die Fläche in einen einfach zusammenhängenden *Fundamentalbereich* verwandelt.

Handelt es sich nun um die wirkliche Herstellung des Polygons, so kann für die Congruenzgruppe 8. Stufe auf die Abhandlung von Herrn Dyck «Ueber die regulären Riemann'schen Flächen» verwiesen werden. Die völlig symmetrische, reguläre Anordnung der dortigen Tafel vertritt das daraus leicht zu bildende Polygon 8. Stufe der ω-Ebene; aus diesem kann man aber das Polygon der erweiterten 16. Stufe etwa folgendermassen erschliessen.

Eine Substitution $S \equiv \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$ mod. 8 spaltet sich modulo 16 eigentlich in 16 Substitutionen, aber diese erweisen sich bezüglich der Gruppe (T, V) zweimal paarweise äquivalent und liefern so nur 4 relativ inäquivalente Dreiecke, die man sich übereinander lagernd denke. Die 4.96 Dreiecke lassen sich dann in 4 congruent eingeteilte *Blätter* zusammenfügen, welche zu den Einheiten gehören

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix},$$

also aus einander hervorgehen durch Substitutionen, die eine in (T, V) relativ ausgezeichnete Untergruppe bilden. Daraus folgt nach der citirten Abhandlung, dass, wie die einzelnen Blätter, auch die Gesammtfläche der 2.384 Elementardreiecke *regulär* eingeteilt ist, und zwar so, dass in den Punkten $J = \infty$ je 2.16 zusammenstossen.

In der ω-Ebene entsteht also das Polygon (T, V) durch das Polygon 8. Stufe und weitere drei Reproduc-

---

*) Math. Ann. XVII p. 488.

tionen derselben nach dem *Princip der Spiegelung*. Das eine der Polygone lagert sich offenbar congruent neben das gegebene. Nun muss sich aber die regulär geteilte Fläche auch in abwechselnd congruente und symmetrische

Streifen ordnen lassen. Wir haben also einfach noch jeden unserer 32 Parallelhalbstreifen an einem seiner freien Kantenbogen zu spiegeln, um damit die fehlenden

Reproductionen zu erschöpfen. Bildet man schliesslich die Parallelstreifen auf die Sectoren eines Kreises ab, so ergibt sich eine Sternfigur, von welcher ein Sector $\left(\frac{\pi}{16}\right)$ in der nebenstehenden *Figur* dargestellt ist. Dabei ist der stärker markirte Bogen die Kante des Polygons 8. Stufe, in Bezug auf welche der Sector sich spiegelt.*)

Denkt man sich die Randbogen nach Anleitung der Figur so bezeichnet, dass der erste Sector durch Drehung um $\frac{\nu\pi}{16}$ nach rechts mit dem ν. Sector zur Deckung kommt, so *gehören die Kanten in folgenden Paaren zusammen*

$$\alpha_\nu \mid \alpha'_{\nu+3}, \quad \beta_\nu \mid \beta'_{\nu+5}, \quad \gamma_\nu \mid \gamma'_{\nu+7}, \tag{23}$$

wobei noch zu bemerken ist, dass die von den inneren Punkten $J = \infty$ nach der Peripherie laufenden Radienstücke aus, im ursprünglichen Polygon der ω-Ebene benachbarten Kanten entspringen. Bedeutet nun $\begin{bmatrix}\alpha' \\ \alpha\end{bmatrix}$ die erzeugende Substitution, welche, auf einen Punkt ω der Kante α angewandt, ihn mit dem Punkte ω' der Kante α' zur Deckung bringt, so ergeben sich bei der gewählten Anordnung folgende *Erzeugende der Gruppe* (T, V):

parabolische $\quad \mathbf{S}^{16}$ und $\mathbf{T}\mathbf{S}^{16}\mathbf{T}$, $\quad$ 24)

hyperbolische $\quad (\nu = 0, 1, \ldots 15)$

$$\left.\begin{aligned}
\begin{bmatrix}\alpha'_{\nu+3} \\ \alpha_\nu\end{bmatrix} &= \begin{pmatrix} 8(\nu^2 + \nu - 1) & -(8\nu + 13) \\ 8\nu - 5 & -8 \end{pmatrix} \\
\begin{bmatrix}\beta'_{\nu+5} \\ \beta_\nu\end{bmatrix} &= \begin{pmatrix} 24(\nu^2 + 3\nu - 3) & -(24\nu + 91) \\ 24\nu - 19 & -24 \end{pmatrix} \\
\begin{bmatrix}\gamma'_{\nu+7} \\ \gamma_\nu\end{bmatrix} &= \begin{pmatrix} 48(\nu^2 + 5\nu - 5) & -(48\nu + 281) \\ 48\nu - 41 & -48 \end{pmatrix},
\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

nebst den inversen Substitutionen.

*) Für die Construction ist die Bemerkung von Wert, dass alle Kreise der Figur einen gemeinschaftlichen Orthogonalkreis besitzen.

Das Polygon soll nun nach 22) 24 Eckpunkte $J=\infty$, 128 Punkte $J=0$, 192 Punkte $J=1$ enthalten. Von den ersteren weist die Figur jedoch nur $1+16$ im Inneren des Polygons nach. Also müssen noch 7 Punkte $J=\infty$ durch die Vereinigung der Randkanten zu stande kommen. Eine Umkreisung einer jeden solchen Ecke liefert aber eine Relation zwischen den erzeugenden Substitutionen 25), welche die an ihn heranreichenden Kanten binden. Man findet demgemäss *die 7 Identitäten:*

$$\left.\begin{aligned}
&\prod_{\nu=0}^{7}\begin{bmatrix}\alpha'_{2\nu+3}\\ \alpha_{2\nu}\end{bmatrix} = \prod_{\nu=0}^{7}\begin{bmatrix}\alpha'_{2\nu+4}\\ \alpha_{2\nu+1}\end{bmatrix} = \prod_{\nu=0}^{15}\begin{bmatrix}\gamma'_{\nu+7}\\ \gamma'_{\nu}\end{bmatrix} = 1,\\
&\prod_{\nu=0}^{7}\begin{bmatrix}\beta'_{2\nu+5}\\ \beta_{2\nu}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_{2\nu+2}\\ \alpha'_{2\nu+5}\end{bmatrix} = \prod_{\nu=0}^{7}\begin{bmatrix}\beta'_{2\nu+6}\\ \beta_{2\nu+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_{2\nu+3}\\ \alpha'_{2\nu+6}\end{bmatrix} = 1,\\
&\prod_{\nu=0}^{7}\begin{bmatrix}\beta'_{2\nu+5}\\ \beta_{2\nu}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma_{2\nu-2}\\ \gamma'_{2\nu+5}\end{bmatrix} = \prod_{\nu=0}^{7}\begin{bmatrix}\beta'_{2\nu-6}\\ \beta_{2\nu+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma'_{2\nu-1}\\ \gamma_{2\nu+6}\end{bmatrix} = 1.
\end{aligned}\right\}\quad 26)$$

Doch ist offenbar die Anordnung der Elementardreiecke um den letzten Eckpunkt völlig durch die um die übrigen mitbestimmt, also auch eine der Identitäten eine Folge der anderen. Demnach können aus den $\begin{bmatrix}\lambda'\\ \lambda\end{bmatrix}$ nunmehr $2p=42$ *unabhängige, hyperbolische erzeugende Substitutionen* $E_{\lambda}^{\lambda'}$ gebildet werden, zu welchen die beiden parabolischen 24) hinzutreten. In Umkehrung des Satzes p. 13 *existirt auch zu diesem Erzeugendensystem der* $E_{\lambda}^{\lambda'}$ *eine entsprechende Polygonaleinteilung der* ω*-Ebene und eine fundamentale Zerschneidung der Riemann'schen Fläche.*

§ 4.

Die Grundcurve und ihre Collineationsgruppe Γ.

Innerhalb des Fundamentalpolygons der 384 Dreiecke W_k kann eine algebraische Modulfunction, deren Galois'sche

Gruppe die Gruppe (T, V) enthält, jeden Wert nur an einer endlichen Anzahl von Stellen annehmen. So nimmt einerseits J einen gegebenen, von 0, 1, ∞ verschiedenen, Wert an 384 äquivalenten Stellen an, anderseits aber gehört zu jedem Wertepaar φ, ψ im Polygon nur ein einziger Punkt. Die Function φ erlangt zwar einen vorgegebenen Wert noch in 8 Dreiecken, ebenso ψ, aber beide Reihen von 8 Dreiecken haben nur eines gemeinsam, wie man leicht verificirt [vgl. 12) und 13)].

Da so durch Simultanstellung von φ und ψ jede Stelle des Polygons eindeutig bestimmt ist, so bilden nach der Klein'schen Bezeichnung φ, ψ *ein volles System von zu der ausgezeichneten Untergruppe* (T, V) *gehörigen Moduln.* Sie heissen auch selbst *ausgezeichnete Moduln* und sind insbesondere solche, welche bei den linearen ω-Substitutionen nicht nur rationale, sondern ebenfalls lineare Transformationen erfahren. Ebenso bilden φ^2, ψ^2 ein volles System ausgezeichneter Moduln 8. Stufe.

Diese besondere Eigenschaft empfiehlt unmittelbar den Uebergang zu *geometrischer Deutung.* Statt φ, ψ als zu der Riemann'schen Fläche des § 3 gehörige Functionen zu betrachten, interpretiren wir sie als Coordinaten der ebenen Curve 2). *Die Punkte der Curve erscheinen dann durch ihre Parameter* ω *eindeutig auf die Stellen des Fundamentalpolygons bezogen, und umgekehrt.* Die relativ inäquivalenten ω-Substitutionen W_k ergeben gebrochene, lineare Transformationen des Modulsystems, oder homogene, lineare Coordinatentransformationen. Also erzeugt die Gruppe G *eine Gruppe* Γ *von Collineationen* W_k, *welche die Curve in sich selbst überführen.* Und zwar sind die Gruppen G *und* Γ *holoedrisch isomorph* aufeinander bezogen.

In homogener Schreibweise werde gesetzt

$$x_1, : x_2, : x_3 = \varphi : \psi : e^{\frac{i\pi}{8}}; \qquad 27)$$

dann lautet die Gleichung der *Grundcurve 8. Ordnung*

$$F = x_1^8 + x_2^8 + x_3^8 = 0\,. \qquad 28)$$

Eine solche Curve besitzt keine mehrfachen Punkte, hat also das allgemeine Geschlecht, das ihrer Ordnung zukommt; somit ist für unsere Grundcurve 28) oder auch für die Riemann'sche Fläche des § 3

$$p = 21\,. \qquad 29)$$

Diese Schreibweise erteilt der Gruppe Γ eine überaus einfache Gestalt, denn offenbar hat die Curve 6 . 8 . 8 Collineationen in sich, welche analytisch gegeben sind durch die *Vertauschungen der Coordinaten und die Multiplicationen derselben mit achten Einheitswurzeln*, also allgemein durch

$$\left.\begin{array}{c} x_1' : x_2' : x_3' = \varepsilon^{\lambda} x_\alpha : \varepsilon^{\mu} x_\beta : \varepsilon^{\nu} x_\gamma\,, \\ \text{wo } \lambda, \mu, \nu = 0, 1, \dots 7\,,\ \lambda + \mu + \nu \equiv 0 \text{ mod. } 8; \\ (\alpha, \beta, \gamma) = \text{Permutation von } (1, 2, 3) \end{array}\right\} \quad 30)$$

und, wie weiterhin stets, $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{8}}$.

Der Isomorphismus von G und Γ ist dadurch bestimmt, dass den Grundoperationen **S** und **T** nach 9) entsprechen:

$$\left.\begin{array}{ll} x_1(\omega + 1) = \varepsilon^{-1} x_1(\omega) & x_1\left(\frac{-1}{\omega}\right) = -x_2(\omega) \\ x_2(\omega + 1) = \varepsilon^{-2} x_3(\omega) & x_2\left(\frac{-1}{\omega}\right) = -x_1(\omega) \\ x_3(\omega + 1) = \varepsilon^{-2} x_2(\omega) & x_3\left(\frac{-1}{\omega}\right) = -x_3(\omega)\,, \end{array}\right\} \quad 31)$$

falls die Coordinatensymbole zugleich als Functionszeichen gebraucht werden. Dabei ist der verfügbare Proportionalitätsfactor so gewählt, dass die Determinante der Collineation ebenfalls gleich Eins wird. Abkürzend stehe für 31) auch

$$\mathsf{S} = (\varepsilon^{-1} x_1,\ \varepsilon^{-2} x_3,\ \varepsilon^{-1} x_2),\ \mathsf{T} = (-x_2, -x_1, -x_3). \quad 32)$$

Als die *erzeugenden Collineationen der Gruppe* Γ erkennt man unmittelbar

$$\begin{aligned} \mathsf{S}^2 &= (\varepsilon^{-2} x_1,\ \varepsilon^{-3} x_2,\ \varepsilon^{-3} x_3) \\ \mathsf{T} &= (-x_2,\ -x_1,\ -x_3) \\ \mathsf{U} = \mathsf{S}^{-1}\mathsf{T}\,\mathsf{S}^{-2} &= (\ x_2,\ x_3,\ x_1), \end{aligned} \quad 33)$$

mit den Perioden 8, 2, 3 resp. Hiernach lässt sich jede lineare Substitution 30) auch *decomponiren* in

$$W = \mathsf{S}^{2\lambda}\mathsf{T}\mathsf{S}^{2\mu}\mathsf{T}\,\mathsf{U}^{\sigma}\,\mathsf{T}^{\tau}\ (\lambda,\mu=0,1,...7;\sigma=0,1,2;\tau=0,1). \quad 34)$$

Um für die 8. Stufe zu specialisiren, hat man als Variabele nur die Quadrate einzuführen

$$\begin{aligned} \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 &= x_1^2 : x_2^2 : x_3^2, \\ \mathfrak{F} &= \xi_1^4 + \xi_2^4 + \xi_3^4 = 0. \end{aligned} \quad 35)$$

Da so die Resultate leicht auch für die *Curve 4. Ordnung* auszusprechen sind, diese aber schon anderweitig untersucht ist*), so möge sich fernerhin die Entwickelung auf die 16. Stufe beschränken, mit nur gelegentlichen Seitenblicken auf jene.

§ 5.

Die Punktgruppen auf der Grundcurve.

Durch die Collineationen der Gruppe Γ werden die Punkte der Grundcurve in Gruppen von, im allgemeinen,

*) Dyck, Math. Ann. XVII p. 510.

384 *homologen* geordnet. Kleinere Gruppen homologer Punkte können nur dadurch entstehen, dass ihre Punkte bei einzelnen Collineationen fest bleiben. *Die Punkte solcher besonderen Gruppen sind also diejenigen Doppelpunkte der Collineationen W_k, welche auf der Grundcurve liegen.* Eine Collineation hat aber entweder 3 oder eine gerade Reihe sich selbst entsprechender Punkte, letztere, falls sie centrisch ist. Die analytischen Bedingungen fliessen in bekannter Weise aus dem Gleichungssystem:

$$\varrho x_i = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} x_k \quad (i = 1, 2, 3),$$

wenn a_{ik} die Substitutionscoefficienten waren. Die damit angedeutete projectivische Untersuchung ist also gewissermassen eine Umkehrung des Ganges von § 3, denn sie zielt auf die Zerlegung des Polygons in seine Dreiecke und deren gegenseitige Gruppirung. Die Hauptresultate mögen kurz angeführt werden.

Nach dem Verhältnis zum Coordinatendreieck sind in Γ *drei Classen von Collineationen* zu unterscheiden, nämlich ($\lambda + \mu + \nu \equiv 0$ mod. 8):

$$\left.\begin{array}{c} \text{I.}\ (\varepsilon^\lambda x_1;\ \varepsilon^\mu x_2,\ \varepsilon^\nu x_3); \\ \text{II.}\ (\varepsilon^\lambda x_2,\ \varepsilon^\mu x_3,\ \varepsilon^\nu x_1),\ (\varepsilon^\lambda x_3,\ \varepsilon^\mu x_1,\ \varepsilon^\nu x_2); \\ \text{III.}\ (-\varepsilon^\lambda x_2, -\varepsilon^\mu x_1, -\varepsilon^\nu x_3), (-\varepsilon^\lambda x_3, -\varepsilon^\mu x_2, -\varepsilon^\nu x_1), (-\varepsilon^\lambda x_1, -\varepsilon^\mu x_3, -\varepsilon^\nu x_2). \end{array}\right\} \quad 36)$$

Collineationen, welche keinen Doppelpunkt auf der Curve haben, mögen kurz als *Verschiebungen*, die übrigen als *Drehungen der Curve* um die auf ihr liegenden Doppelpunkte gekennzeichnet sein.

Im I. Falle entspringen aus $\lambda \gtrless \mu \gtrless \nu$ mod. 8 42 Verschiebungen, sobald aber zwei Exponenten congruent werden, ausser der Identität, 3.7 Perspectiven, in denen stets

gegenüberliegende Seiten und Ecken des Coordinatendreieckes als Axe und Centrum zusammengehören. Die 3 . 8 Schnittpunkte von $F = 0$ mit den Dreiecksseiten

$$\Phi_3 = x_1 x_2 x_3 = 0 \qquad 37)$$

vertreten die Wendepunkte, indem die Tangenten in ihnen achtpunktig berühren. Sie seien kurz die *Undulationspunkte der Curve* genannt. Sie ordnen sich nicht nur dreimal *zu achten in Gerade*, sondern auch 48 mal *in Quadrupel, deren 4 Punkte Berührungspunkte von $F = 0$ mit einem Kegelschnitte sind,* der bei 8 Collineationen von Γ in sich transformirt wird. So gehört z. B. zu dem Quadrupel $(1, 0, \pm\sqrt{\varepsilon^{\varrho}})$, $(0, 1, \pm\sqrt{\varepsilon^{\sigma}})$ der Kegelschnitt

$$\varepsilon^{\varrho} x_1^2 + \varepsilon^{\sigma} x_2^2 - x_3^2 = 0 \quad (\varrho\sigma \equiv 1 \text{ mod. } 2), \qquad 38)$$

der bei der Untergruppe $\mathbf{S}^8$, $\mathbf{S}^{\sigma-\varrho}\,\mathbf{T}\,\mathbf{S}^{\varrho-\sigma}$ unverändert bleibt. Die Undulationspunkte bilden gegenüber allen Collineationen eine besondere Gruppe, sind also identisch mit den 24 durch $J = \infty$ characterisirten Eckpunkten.

Die II. Classe liefert nur Drehungen von der Periode 3, welche paarweise je dieselben zwei Doppelpunkte auf der Curve haben. Diese 2.8^2 Punkte entsprechen $J = 0$. Sie liegen zu je achten auf Strahlen aus den Ecken des Dreieckes, werden daher durch *16-strahlige Büschel* wie $x_1^{16} + x_2^{16} + x_1^8 x_2^8 = 0$ ausgeschnitten, oder symmetrischer durch

$$X_{16} = x_1^8 x_2^8 + x_2^8 x_3^8 + x_3^8 x_1^8 = 0. \qquad 39)$$

Die Punkte ordnen sich derart in Octupel, dass sie definirt sind als die Berührungspunkte eines Systems von 16 $F = 0$ achtfach berührenden Polarkegelschnitten

$$i^{\lambda} x_1^2 + i^{\mu} x_2^2 + i^{\nu} x_3^2 = 0; \qquad 40)$$

aus denselben gehen durch 27) die Doppeltangenten der Curve 4. Ordnung hervor.

In der III. Classe kommen in die erste der 3 Unterabteilungen zunächst, wenn $\lambda \gtrless \mu$ mod. 2, 32 Drehungen um je zwei Undulationspunkte, dann, wenn $\lambda \equiv \mu$ mod. 2, $\lambda + \mu \gtrless 2\nu$ mod. 8, 24 Verschiebungen; endlich entstehen für $\lambda + \mu \equiv 2\nu$ mod. 8 8 centrische Collineationen, deren Axen das Büschel $x_1^8 - x_2^8 = 0$ bilden und 8.8 Drehpunkte definiren. Die ganze Classe liefert so eine Gruppe von 3.64 Punkten $J = 1$, welche durch die 3 Strahlbüschel

$$\Psi_{24} = (x_1^8 - x_2^8)(x_2^8 - x_3^8)(x_3^8 - x_1^8) = 0 \qquad 41)$$

gegeben werden. Nun leitet man leicht aus der allgemeinen Cayley'schen Formel*) ab, dass die Curve, welche *die sextactischen Punkte* von $F = 0$ auschneidet, in $\Phi_8^{15}\Psi_{24} = 0$ zerfällt. *In den 192 Punkten besitzt die Curve also sechspunktig berührende Kegelschnitte, welche nicht zerfallen.*

Die Formen Φ_8, X_{16}, Ψ_{24} *bilden das volle System der Covarianten der Grundcurve*, gemäss ihrer Entstehung. Die allgemeinen Gruppen homologer Punkte werden ausgeschnitten durch Büschel von Curven 48. Ordnung, z. B. $\Phi_8^{16} - k X_{16}^3 = 0$. Daraus folgt**), dass eine rationale Function der Coordinaten, welche in homologen Punkten denselben Wert, und zwar in den besonderen Gruppen der 24, 128, 192 Punkte resp. den Wert ∞, 0, 1, annimmt, identisch ist mit $J = \frac{-4}{27k}$ und dargestellt wird durch

$$J : J - 1 : 1 = 4\, X_{16}^3 : \Psi_{24}^2 : 27\, \Phi_8^{16}. \qquad 42)$$

*) Cayley: On the sextactic points of a plane curve, Phil. Trans. T. 155. I. p. 545.

**) Klein, Math. Ann. XIV p. 448, Dyck XVII p. 514.

II. Capitel.
Das Transformationsproblem des Modulsystems.

§ 6.
Die Repräsentanten 16. Stufe der Transformation n. Grades.*)

Unter *reiner Transformation n. Grades* versteht man in der Theorie der elliptischen Modulfunctionen den Uebergang von einem Periodenverhältnis ω zu

$$\overline{\omega} = \frac{c + d\omega}{a + b\omega}, \textit{ wenn } ad - bc = n \qquad 1)$$

und a, b, c, d ganze Zahlen ohne einen allen gemeinsamen Teiler sind. Alle aus einer allgemeinen Zahl ω entspringenden transformirten Zahlen $\overline{\omega}$ gruppiren sich in *eine endliche Anzahl, N, von Classen* derart, dass alle Zahlen derselben Classe äquivalent, Zahlen verschiedener Classen inäquivalent sind. Greift man aus jeder Classe eine Zahl heraus und nennt die der i. Classe entnommene $R_i(\omega)$, so bilden $R_1(\omega)$, $R_2(\omega)$, ... $R_N(\omega)$ *ein Repräsentantensystem der Transformation* mit der Eigenschaft, dass jede Zahl $\overline{\omega}$ mit einem und nur mit einem der Repräsentanten äquivalent ist. Man beweist dann, dass auch $R_i(S(\omega))$ ein vollständiges Repräsentantensystem bilden, wenn S eine beliebige lineare Substitution ist, da die Coefficienten in R_k und S' so bestimmt werden können, dass

$$R_i(S(\omega)) = S'(R_k(\omega)). \qquad 2)$$

*) Vgl. Gierster, Classenzahlrelationen. Ann. XXI § 4.

Bei ungeradem Grade n pflegt man als *kanonische Repräsentanten* zu nehmen

$$\Omega_{AC} = \frac{16\,C + D\omega}{A} \tag{3}$$

mit den Bedingungen: $AD = n$, $C < A$ und A, C, D ohne gemeinsamen Teiler. Die Zahl N wird, wenn $p_1, p_2, \ldots$ die in n enthaltenen verschiedenen Primfactoren bedeutet, bekanntlich

$$N = n\left(1 + \frac{1}{p_1}\right)\left(1 + \frac{1}{p_2}\right)\ldots \tag{4}$$

Bei dem Transformationsproblem von Congruenzmoduln ist es aber sehr vorteilhaft, die Repräsentanten modulo der Stufenzahl s congruent zu wählen. Die Möglichkeit dieser Wahl ist gesichert, sobald *n und s relativ prim* sind.*) Um einheitlich verfahren zu können, *beschränken wir uns daher bei der 8. und 16. Stufe auf ungerade Transformationsgrade.*

Hier gelten folgende Erwägungen. Ersetzen wir in 1) ω durch $T(\omega)$, so ist die neue Transformationszahl mit ω congruent, und umgekehrt sind alle congruenten Transformationszahlen enthalten in

$$\omega' = \frac{c + d\,T(\omega)}{a + b\,T(\omega)} = \frac{c' + d'\omega}{a' + b'\omega} \equiv \frac{c + d\omega}{a + b\omega} \text{ mod. } 16. \tag{5}$$

Nun geht aber $\bar{\omega}$ in $\bar{\omega}'$ über durch

$$\bar{\omega}' = \frac{\dfrac{cd' - dc'}{n} + \dfrac{ad' - bc'}{n}\,\bar{\omega}}{\dfrac{cb' - da'}{n} + \dfrac{ab' - ba'}{n}\,\bar{\omega}}, \tag{6}$$

---

*) Klein, Ann. XVII p. 67. Ein bekanntes Beispiel bietet in den gewöhnlichen Modulargleichungen die Einführung von $\left(\frac{2}{n}\right)\varphi(n\omega)$ neben $\varphi\left(\frac{\omega + 16k}{n}\right)$ als Wurzel.

und dies ist nur dann eine lineare Substitution, wenn die Coefficieten ganzzahlig sind. Sind aber $\overline{\omega}$ und $\overline{\omega}'$ nicht nur congruent, sondern auch äquivalent, so liefert 6) eine Substitution T, weil die den Coefficienten auferlegten *Congruenzbedingungen modulo 16 und modulo n für ungerades n stets verträglich* sind. Zu $\overline{\omega}$ congruente Zahlen $\overline{\omega}'$ gibt es ferner in jeder Classe, denn, damit

$$\frac{\gamma + \delta\,\Omega_{AC}}{\alpha + \beta\,\Omega_{AC}} \equiv \frac{c + d\omega}{a + b\omega} \text{ mod. } 16\,, \tag{7}$$

sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ nur aus

$$\alpha A \equiv a,\quad \beta D \equiv b,\quad \gamma A \equiv c,\quad \delta D \equiv d \text{ mod. } 16 \tag{8}$$

zu bestimmen. Damit ist auch obiger Satz dargetan.

Sind also $\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma}, \overline{\delta}$ bestimmte Zahlen der Determinante $\overline{\alpha}\,\overline{\delta} - \overline{\beta}\,\overline{\gamma} = 1$, welche den Congruenzen 8) genügen, so können wir geradezu als ein *System von zu $\overline{\omega}$ congruenten Repräsentanten* nehmen

$$R_i(\omega) = \frac{\overline{\gamma} + \overline{\delta}\,\Omega_{AC}}{\overline{\alpha} + \overline{\beta}\,\Omega_{AC}} \equiv \frac{c + d\omega}{a + b\omega} \text{ mod. } 16\,, \tag{9}$$

denn diese sind den Ω_{AC} eindeutig zugeordnet. Zwischen diesen Repräsentanten bestehen nun statt 2) infolge 5) und 6) Gleichungen der Form

$$R_i(T(\omega)) = \overline{T}(R_k(\omega))\,. \tag{10}$$

Diese Ueberlegungen gelten auch für die durch Adiunction von V erweiterte Gruppe, denn man verificirt leicht, dass

$$\frac{c + d\,\mathsf{V}(\omega)}{a + b\,\mathsf{V}(\omega)} \equiv \mathsf{V}\left(\frac{c + d\omega}{a + b\omega}\right) \text{ mod. } 16\,, \tag{11}$$

indem man die beiden Fälle unterscheidet $a \equiv d$ und $b \equiv c$ mod. 2. *Ersetzen wir also in 1) ω durch alle relativ äquivalenten Zahlen, so erhalten wir alle Transformationszahlen, welche zu $\overline{\omega}$ oder $\mathsf{V}(\overline{\omega})$ congruent sind.*

Unterwerfen wir ω nun einer Substitution W_k der Gruppe G

$$\frac{c + d\,W_k(\omega)}{a + b\,W_k(\omega)} = \frac{c_k + d_k\omega}{a_k + b_k\omega} \equiv \overline{\omega}_k \text{ mod. } 16\,, \tag{12}$$

so kann der Uebergang von einem System congruenter Repräsentanten R_i zu einem anderen $R_i^{(k)}$, welches zu $\overline{\omega}_k$ congruent ist, immer auch so durch eine Substitution $\overline{W}_k$ erreicht werden, dass

$$R_i^{(k)}(\omega) = R_i(W_k(\omega)) = \overline{W}_k(R_h(\omega))\,. \tag{13}$$

Man erhält dann alle 384 verschiedenen congruenten Repräsentantensysteme $R_i^{(k)}(\omega)$, indem man die $R_i(\omega)$ sämmtlichen Substitutionen von G unterwirft.

Nun werde diejenige Transformation als die *inverse* bezeichnet, deren Repräsentanten $R_i^{-1}(\omega)$ zu der Umkehrung von 1) gehören

$$\overline{\omega}' \equiv \frac{-c + a\omega}{d - b\omega} \text{ mod. } 16\,. \tag{14}$$

Wenden wir dieselbe auf eine der N Zahlen $R_i(\omega)$ an, so befindet sich unter den N entstehenden eine mit ω relativ äquivalente Zahl.

Lassen wir die Bedingung fallen, dass A, C, D relativ prim sein sollen, so wird die Zahl der Repräsentanten bekanntlich durch die *Divisorensumme* $\Phi(n)$ gegeben. Diese ist nach der Definition von N

$$\Phi(n) = \sum_k N\left(\frac{n}{k^2}\right), \tag{15}$$

summirt über alle in n enthaltenen Quadrate k^2. Hiermit sind also alle *eigentlichen* Repräsentanten zusammengefasst, die zu den sämmtlichen Transformationsgraden $\frac{n}{k^2}$ gehören.

Es ist wichtig, *die eigentlichen Repräsentanten auch nach dem Transformationsgrad als Modul* zu betrachten.

Eine dazu nützliche Anschauung ist es, jeder Transformationszahl $R_i(\omega)$ ein Dreieck $P_i(\omega)$ der ω-Halbebene derart zuzuordnen, dass $nP_i(\omega) = n\frac{\gamma_i + \delta_i\omega}{\alpha_i + \beta_i\omega}$ mit $R_i(\omega)$ [6)] äquivalent ist; dies erfordert nur

$$a_i\,\beta_i \equiv b_i\,\alpha_i \bmod. n. \tag{16)}$$

Dann folgt*) *für die Aequivalenz zweier Transformationszahlen* $R_i = nP_i$, $R'_i = nP'_i = nP_i(\mathrm{P}'_i)$, aus der Identität

$$n\frac{\gamma'_i + \delta'_i\,\omega}{\alpha'_i + \beta'_i\,\omega} = \frac{n\gamma'_i + \delta'_i \cdot n\omega}{\alpha'_i + \frac{1}{n}\beta'_i \cdot n\omega}, \tag{17)}$$

als notwendige und hinreichende Bedingung die, dass P'_i *eine Substitution der Gruppe sei*

$$\beta'_i \equiv 0 \bmod. n. \tag{18)}$$

Gehört nun P'_i dieser Gruppe 18) an, so kann die Gleichung

$$P_i(\mathrm{P}'_i) = \mathrm{P}(P'_i) \tag{19)}$$

derart erfüllt werden, dass sie für alle Repräsentanten und dasselbe P gilt. Man findet als notwendige und hinreichende Bedingung, dass

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & k \\ k & 0 \end{pmatrix} \bmod. n \quad (k^2 \equiv 1), \tag{20)}$$

also, dass P *eine Substitution der Congruenzgruppe* n. *Stufe* sei. Derselben entspricht wieder ein Fundamentalpolygon, dessen Dreiecke alle modulo n verschiedenen Substitutionen vertreten (vgl. § 2), resp. eine Riemann'sche Fläche n. Stufe (§ 3).**)

*) Hurwitz, Grundlagen. Math. Ann. XVIII p. 567, 575.

**) Für die Simultanstellung der Flächen 16. und n. Stufe vgl. § 7.

§ 7.

Modularcorrespondenzen.

Die Untersuchung der Repräsentanten zeigt, dass einer Stelle ω des Fundamentalpolygons der erweiterten 16. Stufe durch ω-Transformation n. Grades $384 \cdot N$ inäquivalente Stellen $\overline{\omega}$ zugeordnet sind. Diese verteilen sich in 384 Gruppen von je N Stellen $R_i^{(k)}(\omega)$ derart, dass diese Gruppen, jede als ein Ganzes betrachtet, aus einander durch die Substitutionen von G hervorgehen. Auf das Modulsystem übertragen, sagt dies aus, dass einem Punkte ω der Grundcurve 8. Ordnung 384 unter sich homologe Gruppen von je N Punkten der transformirten Parameter $\overline{\omega} = R_i^{(k)}(\omega)$ $(i = 1, 2, \dots N)$ zugewiesen sind. Zugleich gehen aus irgend einem Punkte $\overline{\omega}$ durch die inverse Transformation N Punkte $R_i^{(k)-1}(\overline{\omega})$ hervor, unter denen sich auch ω befindet.

Je nachdem wir uns den Parameter eines Curvenpunktes in der Form ω oder $R_i^{(k)}(\omega)$ denken, wollen wir den Punkt zu der ersten oder der zweiten von *zwei Punktschaaren* auf der Curve rechnen. Entsprechen sich nun Punkte auf einer Curve derart, dass jedem Punkte der einen Schaar N Punkte der andern und umgekehrt auch jedem Punkte der letzteren N der ersteren zugewiesen sind, so wird diese Beziehung in der Geometrie als *eine (N, N)-deutige Correspondenz* bezeichnet. Demnach ist *der volle Ausdruck der Transformation n. Grades des Modulsystems die Existenz von 384 (N, N)-deutigen Correspondenzen auf der Grundcurve.* Man lässt sie nach 10), 11) sämmtlich aus einer unter ihnen hervorgehen, indem man die Punkte der einen Schaar successive allen Collineationen der Gruppe Γ unterwirft. *Die 384 Correspondenzen sind daher geometrisch nicht wesentlich verschieden.*

Die Modularcorrespondenz hat keine singulären Punkte, welchen unendlich viele Punkte der andern Schaar zugeordnet wären, da für keinen speciellen Wert von ω die transformirten $\bar{\omega}$ unbestimmt werden können und den Parametern die Punkte eindeutig entsprechen. Also besitzen auch die transformirten Moduln $\bar{\varphi}, \bar{\psi}$ auf der zu φ, ψ gehörigen Riemann'schen Fläche keinen wesentlich singulären Punkt.

Dies folgt auch direct aus der Betrachtung dieser Fläche (vgl. § 3). Nach I. 3) können die Functionen φ, ψ nur für rationale ω-Werte, wobei aber $\omega = i\,\infty$ mitgerechnet sei, 0 oder ∞ werden; rationalen ω entsprechen aber wieder rationale $\bar{\omega}$. Wesentliche Singularitäten könnten überhaupt nur in diesen Punkten liegen. Denn für alle nicht rationalen Punkte ω_0 der Fläche ist es klar, dass sowol φ, ψ als $\bar{\varphi}, \bar{\psi}$ endliche Werte mit endlicher Ordnungszahl annehmen, da dort $\omega - \omega_0$ als unendlich klein der ersten Ordnung zu rechnen ist. Nun entspricht aber einer einmaligen Umkreisung eines rationalen Punktes auf der Fläche, z. B. von $i\,\infty$, in der ω-Ebene überhaupt kein geschlossener Weg, wol aber eine einmalige Umkreisung des Punktes $q = 0$ in der Ebene, auf welche die ω-Ebene durch die Function $q^{\frac{1}{8}}$ abgebildet wird. Demnach ist *in der Nähe des Punktes $i\,\infty$ auf der Fläche die Grösse $q^{\frac{1}{8}}$ als unendlich klein erster Ordnung* zu betrachten. In der Umgebung derselben gelten die Reihenentwickelungen

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}} q^{-\frac{1}{8}} \ldots, \quad \frac{1}{\bar{\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-2\frac{C}{A} i\pi} q^{-\frac{1}{8}\frac{D}{A}} \ldots, \qquad 21)$$

d. h. $\frac{1}{\varphi}$ wird einfach und $\frac{1}{\bar{\varphi}}$ von der Ordnung $\frac{D}{A}$ un-

endlich, so dass $\frac{1}{\varphi}$ dort zugleich einen Verzweigungspunkt besitzen kann. Diese Betrachtungen übertragen sich auf jeden andern Eckpunkt, denn in der Umgebung von $\omega = -\frac{\alpha}{\beta}$ ist statt nach $e^{\frac{i\pi\omega}{8}}$ nach Potenzen von $e^{\frac{i\pi}{8}\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}}$ zu entwickeln.*) So kann man verificiren, dass auch in den Eckpunkten die Ordnungszahlen endlich bleiben.

Somit bestehen zwischen φ, ψ *und* $\bar{\varphi}, \bar{\psi}$ *algebraische Relationen, die man folgendermassen bilden kann.* Bedeutet u eine *Unbestimmte*, über deren Wert wir zunächst nicht verfügen, so nimmt die lineare Function $\bar{\varphi} + u\bar{\psi}$ an den N zu einem gegebenen Wertepaar φ, ψ gehörigen Stellen $\bar{\varphi}, \bar{\psi}$ der Fläche N Werte an. Eine symmetrische Function dieser Werte ist für jedes u eine eindeutige Function auf der Fläche φ, ψ, welche auf ihr ebensowenig wie $\bar{\varphi}, \bar{\psi}$ wesentliche Singularitäten besitzt. Daraus folgert die Theorie der algebraischen Functionen, dass die Coefficienten der Potenzen von u rationale Functionen von φ, ψ sind. Also sind $\bar{\varphi} + u\bar{\psi}$ Wurzeln einer algebraischen Gleichung, deren Coefficienten rationale Functionen von u, φ, ψ sind, oder es bestehen algebraische Gleichungen $f(\bar{\varphi} + u\bar{\psi};\ \varphi, \psi) = 0$. Jede solche Gleichung bestimmt, geometrisch gesprochen, ein System von N parallelen Geraden durch die Punkte $\bar{\varphi}, \bar{\psi}$ der Curve I 2). Durch partielle Elimination kann man auch allgemeinere Gleichungen

$$f(\bar{\varphi}, \bar{\psi};\ \varphi, \psi) = 0 \tag{22)}$$

herstellen, deren Grad in $\bar{\varphi}, \bar{\psi}$ sehr wol kleiner als N gemacht werden kann. Indessen bleibt die Frage offen,

*) Hurwitz, Ann. XXV p. 69.

welche Anzahl und Combination dieser Gleichungen zu nehmen ist, um die N Wurzelpaare $\bar{\varphi}, \bar{\psi}$ *zu bestimmen.* Es genügt auch algebraisch, sich auf die Gleichungen eines solchen Systems zu beschränken.

Die Correspondenz des n. Transformationsgrades besitzt eine *Monodromiegruppe*, welche als die Gesammtheit derjenigen Permutationen der Wurzelpaare $\bar{\varphi}, \bar{\psi}$ definirt ist, die folgendermassen entstehen: Man lasse φ, ψ von einer Stelle aus, zu der lauter endliche und verschiedene $\bar{\varphi}_k, \bar{\psi}_k$ gehören, auf der Riemann'schen Fläche alle geschlossenen Wege beschreiben, auf denen kein Verzweigungspunkt liegt, und verfolge, wie auf jedem derselben jedes der N Wurzelpaare $\bar{\varphi}_k, \bar{\psi}_k$ stetig und eindeutig in sich selbst oder ein anderes übergeht. Nun gehören solche geschlossene Wege einerseits zu den Substitutionen der erweiterten Congruenzgruppe 16. Stufe. Anderseits führt eine lineare Substitution P nur dann sämmtliche Classen von Transformationszahlen in sich selbst über, wenn die Bedingung 19) erfüllt ist, d. h. wenn P auch auf der Riemann'schen Fläche n. Stufe 20) einen geschlossenen Weg erzeugt. Da nun beide Forderungen nach dem mehrfach gebrauchten Princip vereinbar sind, so ist *die Monodromiegruppe der Modularcorrespondenz holoedrisch isomorph zu der Gesammtheit der modulo n incongruenten Substitutionen*

$$P \equiv \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \bmod. n \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1), \tag{23}$$

so dass die Permutationen der Wurzelpaare durch diejenigen P erzeugt werden*), welche zugleich der Gruppe (T, V) angehören: $P \equiv 1, V \bmod. 16$.

Man beweist dann noch in gewohnter Weise, dass

*) Vgl. Hurwitz, l. c. Math. Ann. XVIII p. 574.

die Galois'sche Gruppe des Gleichungssystems nach Adjunction von $\sqrt{\left(\frac{-1}{n}\right)n}$ mit der Monodromiegruppe 23) identisch wird.

Die Modularcorrespondenz heisst nun irreducibel, wenn ihre Monodromiegruppe transitiv ist, d. h. wenn durch geeignete Wahl der Vertauschungswege jedes der zu φ, ψ gehörigen Wertepaare $\overline{\varphi}_k$, $\overline{\psi}_k$ in jedes andere übergeführt werden kann. Das Zerfallen einer Gleichung 22) der irreducibelen Correspondenz in Gleichungen derselben Form kann also nie in der Art stattfinden, dass irgend eine der letzteren nur einen Teil der zu φ, ψ gehörigen N Wurzelpaare $\overline{\varphi}_k$, $\overline{\psi}_k$ lieferte; vielmehr müsste jeder Factor entweder schon für sich alle Wurzeln definiren oder dürfte keine derselben enthalten.

Umgekehrt muss im Falle der Reducibilität die Monodromiegruppe intransitiv sein, so dass schon kleinere Cyclen von nur N' Wertepaaren $\overline{\varphi}_k$, $\overline{\psi}_k$ existiren, deren symmetrische Functionen auf der Fläche eindeutig, also in φ, ψ rational sind. *Bei reiner Transformation kann jedoch die Gruppe nicht intransitiv sein,* denn dann würden zugleich die N' Werte $\overline{\varphi}_k$ $(N' < N)$ schon für sich die Eigenschaft haben, durch alle Substitutionen 21) nur untereinander vertauscht zu werden, während dies doch mit dem Irreducibilitäts-Beweise für die Modulargleichungen im Widerspruch wäre.

§ 8.

Die simultanen Collineationen der Hauptcorrespondenz.

Infolge der Gleichberechtigung der 384 Correspondenzen beschränken wir die Untersuchung auf eine der-

selben. Wir wollen die durch die Congruenz

$$\bar{\omega} \equiv n\,\omega \text{ mod. } 16 \tag{24}$$

characterisirte Correspondenz als die *Hauptcorrespondenz* auszeichnen. Als *ihre Repräsentanten* sind nach 9) zu nehmen

$$R_i'(\omega) = \Omega'_{AC},\ R_i''(\omega) = \frac{32 + 27\Omega''_{AC}}{19 + 16\Omega''_{AC}}, \tag{25}$$

wo Ω'_{AC} die kanonischen Repräsentanten bedeutet, in welchen $\left(\frac{2}{A}\right) = +1$, Ω''_{AC} diejenigen, in welchen $\left(\frac{2}{A}\right) = -1$, und wobei die Substitution

$$\begin{pmatrix} 32 & 27 \\ 19 & 16 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \equiv (\mathbf{S}^8\,\mathbf{T})^2\,\mathbf{V} \text{ mod. } 16\,. \tag{26}$$

Die Repräsentanten der inversen Transformation gehören zu

$$\bar{\omega}' \equiv \frac{\omega}{n} \text{ mod. } 16, \tag{27}$$

so dass nach 6) eine lineare Substitution existirt

$$\bar{\omega}' \equiv \frac{\frac{\bar{\omega}}{n}}{n} \text{ mod. } 16. \tag{28}$$

Die durch die Hauptcorrespondenz einander zugeordneten Punktschaaren mögen als (x) und (z) unterschieden werden. Unterwirft man nun die Schaar (x) einer Collineation W, welche ihre Punkte in neue Lagen (x') bringt, und entsprechen diesen (x') vermöge der Hauptcorrespondenz Punkte (z'), so muss die Schaar derselben nach 13) ebenfalls durch eine Collineation $\overline{W}$ der Gruppe Γ direct aus der Schaar (z) ableitbar sein. *So werden durch 13) die Collineationen der Gruppe Γ derart eindeutig in Paare $W, \overline{W}$ geordnet, dass die simultane Anwendung von W auf (x) und von $\overline{W}$ auf (z) die Correspondenz nur in sich selbst überführt.*

Für die Hauptcorrespondenz ergeben sich aus der Identität [vgl. 17)]

$$n\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}\equiv\frac{n\gamma+\delta\cdot n\omega}{\alpha+\frac{\beta}{n}\cdot n\omega}\ \text{mod. } 16 \qquad 29)$$

als *Paare simultaner Substitutionen*

$$W(\omega)\equiv\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega},\quad \overline{W}(\overline{\omega})\equiv\frac{n\gamma+\delta\overline{\omega}}{\alpha+\frac{\beta}{n}\overline{\omega}}\ \text{mod. } 16. \qquad 30)$$

Ihnen entsprechen simultane Collineationen der Gruppe Γ und zwar den Grundoperationen I 32)

$$\left.\begin{array}{l} \mathsf{S}(\omega),\ \overline{\mathsf{S}}(\overline{\omega})\equiv n+\omega \text{ oder } \overline{\mathsf{S}}=\left(\varepsilon^{-n}z_1,\ \varepsilon^{-\frac{3n+1}{2}}z_3,\ \varepsilon^{-\frac{3n-1}{2}}z_2\right) \\ \mathsf{T}(\omega),\ \overline{\mathsf{T}}(\overline{\omega})\equiv\frac{-n}{1-\frac{\omega}{n}},\ \text{also je nachdem} \\ n^2\equiv 1,\ \overline{\mathsf{T}}(\overline{\omega})\equiv\mathsf{T}(\overline{\omega}),\ \overline{\mathsf{T}}=(-z_2,-z_1,-z_3), \\ n^2\equiv 9,\ \overline{\mathsf{T}}(\overline{\omega})\equiv\mathsf{S}^8\,\mathsf{T}\,\mathsf{S}^8\,\mathsf{V}(\overline{\omega})\equiv\frac{5}{3\overline{\omega}},\ \overline{\mathsf{T}}=(z_2,z_1,-z_3). \end{array}\right\} 31)$$

Hiermit ist die *Gruppe G oder Γ auf sich selbst holoedrisch isomorph bezogen*, denn die Zuordnung von W und $\overline{W}$ ist wechselweise eindeutig, jedoch der Art nach verschieden je nach dem quadratischen Character von n in Bezug auf 2.

Wir berechnen nun insbesondere *zu den erzeugenden Collineationen I 33) die simultanen* und finden

$$\left.\begin{array}{l} \overline{\mathsf{S}}^2=(\varepsilon^{-2n}z_1,\ \varepsilon^{-3n}z_2,\ \varepsilon^{-3n}z_3) \\ \overline{\mathsf{T}}\ =\left(-\left(\frac{2}{n}\right)z_2,\ -\left(\frac{2}{n}\right)z_1,\ -z_3\right) \\ \overline{\mathsf{U}}\ =\left(\left(\frac{2}{n}\right)z_2,\ \varepsilon^{\frac{n-1}{2}}z_3,\ \left(\frac{2}{n}\right)\varepsilon^{-\frac{n-1}{2}}z_1\right), \end{array}\right\} 32)$$

so dass die beiden Schaaren (x) und (z) gleichzeitig Collineationen unterliegen, die im allgemeinen durchaus verschieden sind.

Geht man von der Hauptcorrespondenz zu einer beliebigen anderen Correspondenz über, characterisirt durch $\overline{\omega} \equiv n\, W(\omega) \equiv \overline{W}(n\,\omega)$ mod. 16, so sind die zu $\mathbf{S}, \mathbf{T}$ simultanen $\overline{\mathbf{S}}, \overline{\mathbf{T}}$ von 31) zu ersetzen durch $\overline{W}\,\overline{\mathbf{S}}\,\overline{W}^{-1}$, $\overline{W}\,\overline{\mathbf{T}}\,\overline{W}^{-1}$, und man erhält für jedes W einen neuen Isomorphismus. *Die Gruppe Γ ist somit auf zwei wesentlich verschiedene Weisen, je nachdem* $\frac{2}{n} = \pm 1$, *384 mal isomorph auf sich selbst bezogen;* es gibt auch keine weiteren Beziehungen dieser Art.*) Dieser vielfache Isomorphismus ist aber eine bekannte characteristische Eigenschaft der Galois'schen Gruppe der Modulargleichung. In der Tat ist die Gruppe G geradezu die Galois'sche Gruppe der Correspondenz des 16. Transformationsgrades (vgl. § 7).

Neben den simultanen Collineationen gibt es noch eine Operation, welche die Correspondenz nicht ändert. Benennen wir nämlich in der Hauptcorrespondenz einen Punkt z_i als x_i, so tritt nicht auch an Stelle von x_i einfach z_i in der neuen Bezeichnung, sondern gemäss 28) ist (x_1, x_2, x_3) zu ersetzen durch $\left(\left(\frac{2}{n}\right) z_1, \left(\frac{2}{n}\right) z_2, z_3\right)$. *Somit bleibt die Correspondenz wiederum ungeändert, wenn man gleichzeitig die Vertauschungen vornimmt*

$$\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & z_1, & z_2, & z_3 \\ \left(\frac{2}{n}\right) z_1, & \left(\frac{2}{n}\right) z_2, & z_3, & x_1, & x_2, & x_3 \end{pmatrix}. \qquad 33)$$

Also ist auch in dieser Hinsicht die Analogie zu den

*) Gierster, Untergruppen der Galois'schen Gruppe der Modulargleichung. Ann. XVIII p. 355.

Modulargleichungen vollständig, denn deren Argumente sind bekanntlich in ähnlicher Weise vertauschbar.

Diese simultanen Operationen werden weiterhin eine grundlegende Bedeutung gewinnen. Um für ihre rechnerische Verwendung eine grössere Uebersichtlichkeit zu erzielen, führen wir *an Stelle der* z_i *neue Variabele* y_i ein durch die Substitution

$$y_1 = \sigma\left(\frac{2}{n}\right) z_1, \quad y_2 = \sigma z_2, \quad y_3 = \sigma \varepsilon^{\frac{n-1}{2}} z_3, \tag{34}$$

wo $\sigma = \left(\frac{2}{n}\right) \varepsilon^{-3\frac{n-1}{2}}$ nur hinzugefügt ist, um die Determinante zu Eins zu machen. Dies entspricht, beiläufig bemerkt, einem Uebergang von der Hauptcorrespondenz zu einer Correspondenz

$$\overline{\omega} \equiv \mathsf{S}^{n(n-1)} \mathsf{T} \mathsf{S}^{-(n-1)} \mathsf{T}(n\omega) \equiv n \frac{n-1+(n(n-1)^2+1)\omega}{1+n(n-1)\omega} \text{ mod. } 16, \tag{35}$$

in welcher schon die Repräsentantenwahl von n mod. 16 abhängt.

Durch diese Einführung gewinnt die *Tabelle der simultanen Collineationen* die einfachere Gestalt

$$\left.\begin{array}{ll} \mathsf{S}^2 = (\varepsilon^{-2} x_1, \varepsilon^{-3} x_2, \varepsilon^{-3} x_3), & \overline{\mathsf{S}}^2 = (\varepsilon^{-2n} y_1, \varepsilon^{-3n} y_2, \varepsilon^{-3n} y_3) \\ \mathsf{T} = (-x_2, -x_1, -x_3), & \overline{\mathsf{T}} = (-y_2, -y_1, -y_3) \\ \mathsf{U} = (x_2, x_3, x_1), & \overline{\mathsf{U}} = (y_2, y_3, y_1), \end{array}\right\} \tag{36}$$

während die Vertauschungen 33) übergehen in

$$\mathsf{P} = \left(\sigma^{-1} y_1, \sigma^{-1}\left(\frac{2}{n}\right) y_2, \sigma^{-1} \varepsilon^{-\frac{n-1}{2}} y_3\right)\left(\sigma\left(\frac{2}{n}\right) x_1, \sigma x_2, \sigma \varepsilon^{\frac{n-1}{2}} x_3\right). \tag{37}$$

Die einzelnen Zeilen von 36) und 37) sollen künftig kurz unterschieden werden als ε-*Multiplication* (S^2, $\overline{\mathsf{S}}^2$), *Trans-*

position $(\mathsf{T}, \overline{\mathsf{T}})$, *cyclische Verschiebung* $(\mathsf{U}, \overline{\mathsf{U}})$ und *Reihenwechsel* (P).

Nach der Redeweise der analytischen Geometrie sind die Variabelen der beiden Reihen, je nachdem $n \equiv +1$ oder $n \equiv -1$ mod. 8, als *cogredient und contragredient* zu unterscheiden, dagegen wären sie, wenn $\left(\frac{2}{n}\right) = -1$, etwa *allgemein digredient* zu nennen.

§ 9.

Die Classe der Schnittsystem-Correspondenzen.

Es sei auf einer Grundcurve eine (N, N)-deutige Correspondenz zwischen Punktschaaren (x) und (z) gegeben, welche durch algebraische, *biternär-homogene* Gleichungen der Gestalt

$$f(x_1, x_2, x_3;\ z_1, z_2, z_3) = 0 \qquad 38)$$

darstellbar sei.

Eine solche biternäre Gleichung für sich stellt ein Gebilde der Ebene dar, in welchem jedem Punkte (x) als Pol eine ganze Curve $f_z = 0$, jedem (z) eine Curve $f_x = 0$ entspricht, wenn die Indices je die laufenden Coordinaten kennzeichnen. Auf der Grundcurve $F = 0$ aber ordnet $f = 0$ jedem Punkt (x), resp. (z) derselben die Schnittpunkte mit $f_z = 0$, resp. $f_x = 0$ zu.

Nun gehören aber möglicherweise nicht alle Schnittpunkte der Curve $f_z = 0$ zu der Gruppe (z), welche (x) in der gegebenen Correspondenz entspricht; dann werden neben $f = 0$ weitere Bestimmungen erforderlich. Es wird z. B. festgesetzt, dass diejenigen Schnittpunkte der *Correspondenzcurve* $f_z = 0$, welche in ihren Pol (x) oder in feste Punkte der Grundcurve fallen, ausgeschlossen und

nur die übrigen, beweglichen Schnittpunkte zur *Correspondenzgruppe* (z) gerechnet werden sollen. Weitere Gleichungen können nötig werden, um auch von diesen wiederum einige auszuschliessen, indem etwa durch die nicht zu berücksichtigenden Schnittpunkte von $f_z = 0$ eine zweite Curve gelegt wird, u. s. w.

Die Darstellung der Correspondenz erfordert also im allgemeinen ein System biternärer Gleichungen, und man hätte hier in die Untersuchung der Frage einzutreten (§ 7), was für Gleichungssysteme insbesondere zur Definition der Modularcorrespondenzen notwendig und hinreichend sind. Indessen sei hier auf die in der Einleitung citirten Hurwitz'schen Resultate verwiesen. Das nächste Interesse knüpft sich alsdann an das speciellere Problem:

Existiren Modularcorrespondenzen, welche durch eine einzige algebraische Gleichung $f = 0$ neben $F = 0$ vollständig definirt sind? eventuell: *unter welchen Bedingungen?* Auf diese Untersuchung sei alles folgende beschränkt.

Zunächst wollen wir, unter Festsetzung der Terminologie, einige Consequenzen aus der Annahme ziehen, dass der volle algebraische Ausdruck einer ω-Transformation n. Grades durch *eine* verschwindende ganze biternäre Form $f = 0$ *rein* gegeben sei. *Einem Punkte der einen Schaar sind dann die sämmtlichen Schnittpunkte der zugehörigen Correspondenzcurve mit der Grundcurve als Correspondenzgruppe der andern Schaar zugeordnet. Zuordnungen dieser Art sollen kurz als Schnittsystem-Correspondenzen n. Grades characterisirt und in eine Classe zusammengefasst werden.*

Eine erste wichtige Folgerung aus § 8 lautet: *Ist die Hauptcorrespondenz eine Schnittsystem-Correspondenz, so gehören gleichzeitig alle 384 Correspondenzen zu dieser*

besonderen Classe. In der Tat erfordert der Uebergang von einer Correspondenz zu einer andern nach 13) nur die Anwendung von linearen Transformationen auf die eine Variabelenreihe. Daher werden wir weiterhin stets, der Einführung von y_i durch 34) entsprechend, die Correspondenzgleichung 38) in der Form voraussetzen:

$$f(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) = 0. \qquad 39)$$

Bei einer modularen Schnittsystem-Correspondenz sind die sämmtlichen Schnittpunkte der Correspondenzcurven mit $F = 0$ beweglich mit dem zugehörigen Pole und von ihm verschieden, ersteres, weil $\bar{\omega}$ mit ω variabel ist, letzteres, weil keine der Transformationszahlen allgemein mit ω äquivalent sein kann. Entsprechen aber einem Punkte (x) ebenso viele bewegliche und von ihm verschiedene Punkte (y) wie umgekehrt, so müssen $f_y = 0$ und $f_x = 0$ Curven derselben Ordnung m oder es muss *die biternäre Form f in beiden Reihen von Variabelen von derselben Dimension m* sein. Es werde dann die Schnittsystem-Correspondenz n. Grades auch von der m. Ordnung genannt.

Für eine Correspondenz dieser Classe gilt infolge des vorigen Satzes das einfache *Chasles'sche Correspondenzprincip.* Es stellt nämlich

$$f(x_1, x_2, x_3; x_1, x_2, x_3) = 0$$

den Ort eines Punktes (x) dar, durch den die Curve der correspondirenden Punkte (y) hindurchgeht. *Also hat die Correspondenz $16\,m = 2\,N$ Coincidenzpunkte**).

Bei reiner ω Transformation kann die Gleichung $f = 0$ nur das gleich Null gesetzte Potenzenproduct biternärer For-

*) Hieraus entspringt die specielle Gruppe von Classenzahlrelationen 16. Stufe für die quadratischen Formen der Determinante $-n$, wenn n den Kriterien des § 14 genügt (vgl. die in der Einleitung citirten Abhandlungen).

men $f_1, f_2, \ldots$ *sein, welche im gewöhnlichen Sinne irreducibel sind und schon einzeln, gleich Null gesetzt, die Correspondenz rein darstellen.* Denn Teilbarkeit von f durch einfach ternäre Formen ist schon nach p. 40 auszuschliessen; gleich Null gesetzte biternäre Factoren müssen nach p. 33 alle Wurzelpaare liefern, dürfen aber nach der Voraussetzung über $f = 0$ offenbar keine fremden Wurzeln enthalten.

Gesetzt, es gehören nun zu allen Transformationsgraden $\frac{n}{k^2}$ (vgl. Schluss von § 7) irreducibele Schnittsystem-Correspondenzen $f_1 = 0$, $f_2 = 0, \ldots$ und wir betrachten diese alle gleichzeitig, so bilden sie zusammen nach 15) eine $(\Phi(n), \Phi(n))$*-deutige reducibele Schnittsystem-Correspondenz.* Die Gleichung derselben ist offenbar $f_1, f_2 \ldots = 0$, so dass ihre Correspondenzcurven im gewöhnlichen Sinn zerfallen. Dann haben aber auch die reducibelen Correspondenzen aller Grade $\frac{n}{k^2}$ den nämlichen Character, da überhaupt, wenn k'^2 noch alle quadratischen Teiler von $\frac{n}{k^2}$ bedeutet,

$$\Phi\left(\frac{n}{k^2}\right) = \sum_{k'} N\left(\frac{n}{k^2 k'^2}\right) \text{ (für alle } k^2). \qquad 40)$$

Dabei sind die irreducibelen Bestandtheile der zerfallenden Correspondenzcurven für alle diese Grade identisch.

Da nun das Gleichungssystem 40) die Coefficientendeterminante 1 ergibt, so folgen auch umgekehrt alle $N\left(\frac{n}{k^2}\right)$ als lineare Aggregate der $\Phi\left(\frac{n}{k^2 k'^2}\right)$ mit ganzzahligen Coefficienten. Um diese Umkehrung übersichtlich zu machen, führen wir $\prod_i k_i^2$ ein als das Product aller in n enthaltenen Primzahlquadrate k_i^2, so dass, wenn

$$n = n' \prod_i k_i^2, \qquad 41)$$

n' lauter verschiedene Primfactoren enthält. Ordnen wir dann 40) in

$$\left.\begin{aligned} N(n') &= \Phi(n') \\ N(n'k_i^2) &= \Phi(n'k_i^2) - N(n') \\ N(n'k_i^2k_k^2) &= \Phi(n'k_i^2k_k^2) - N(n'k_i^2) - N(n'k_k^2) - N(n') \text{ u.s.w.,} \end{aligned}\right\} \quad 42)$$

so folgt auch der Satz: *Wenn die reducibelen Correspondenzen aller Grade* $\left(\frac{n}{k^2}\right)$ *Schnittsysteme liefern, so sind schon die irreducibelen Correspondenzen dieser Grade ebenfalls Schnittsystem-Correspondenzen.* Denn es gibt offenbar [erste Gleichung 42)] neben der irreducibelen keine reducibele Schnittsystem-Correspondenz n'. Grades; in den successive zu betrachtenden folgenden Gleichungen entspricht rechts dem Minuenden nach Voraussetzung eine Schnittsystem-Correspondenz, den Subtrahenden weisen die vorhergehenden Gleichungen Schnittsystem-Correspondenzen zu, deren Correspondenzcurven je in denen des Minuenden enthalten sind; also gehört auch je zur linken Seite eine Correspondenz dieser Classe.

Nach den bisherigen Ueberlegungen ist zur Existenz einer modularen Schnittsystem-Correspondenz jedenfalls erforderlich $m = \frac{N}{8}$, oder

$$N \equiv 0 \bmod. 8. \qquad 43)$$

Daraus folgen schon gewisse *Bedingungen für die Gradzahl n* (siehe § 14). Eine blosse Abzählung der Punktezahl sagt indessen noch nichts darüber aus, ob die $N = 8m$ Punkte der Correspondenzgruppen wirklich die vollen Schnittpunktsysteme von Curven m. Ordnung mit der Grundcurve bilden. Es ist die Aufgabe des folgenden Capitels die notwendigen und hinreichenden Bedingungen abzuleiten, unter welchen die $8m$ Punkte der Hauptcorrespondenz je auf einer Curve m. Ordnung liegen.

III. Capitel.

Kriterien der Schnittsystem-Correspondenzen.

§ 10.

Die Integrale erster Gattung auf der Grundcurve.

Es ist zu untersuchen, *ob und wann* $8m$ *Punkte der Grundcurve, welche durch ihre transcendenten Parameter* $R_i(\omega)$ *definirt sind, die Schnittpunkte derselben mit einer Curve* m*. Ordnung sein können.*

Das Kriterium dafür formulirt in transcendenter Weise das *Abel'sche Theorem*, welches für eine Grundcurve ohne Doppelpunkte folgendermassen ausgesprochen werden kann: Bestimmen zwei Curven m. Ordnung $f=0$, $g=0$ auf der Grundcurve n. Ordnung $F=0$ die Schnittpunktsysteme $(x^{(k)})$, $(c^{(k)})$ $(k=1,2,\dots mn)$, so können die Punkte derselben derart in Paare geordnet werden, dass die Summen gleichartiger Integrale erster Gattung, modulis Perioden derselben, verschwinden, wenn die Integration jeweilen von den Punkten $(c^{(k)})$ als unteren Grenzen bis zu den zugeordneten Punkten $(x^{(k)})$ als oberen Grenzen erstreckt wird. Sind also $I^{(r)}$ p linear unabhängige, überall endliche Integrale, so bestehen die p Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{mn}\int_{(c^{(k)})}^{(x^{(k)})} d\,I^{(r)} = 0 \quad (r=1,2,\dots p). \tag{1}$$

Umgekehrt ist *das Bestehen dieser* p *Integralgleichungen die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass durch das Punktsystem* $(x^{(k)})$ *eine Curve* m*. Ordnung* $f=0$ *geht, wenn die Punkte der unteren Grenzen* $(c^{(k)})$ *auf einer solchen* $g=0$ *gewählt sind.*

Auf unserer Grundcurve 8. Ordnung bilden das Punktsystem $(x^{(k)})$ die 8 m, nach § 9 ingesammt beweglichen, Punkte $R_i(\omega)$. Da das Abel'sche Theorem die Irreducibilität der Curven nicht voraussetzt, *wählen wir als zweckmässigste Curve der unteren Grenzen* $(c^{(k)})$ *eine Undulationstangente.* Denn dann ist der zugehörige Berührungspunkt — wir wählen als solchen insbesondere $\omega = i\infty$ oder $(0, 1, \sqrt{\varepsilon})$ — gemeinsame untere Grenze aller Integrale des Theorems, und jede Festsetzung über die Zuordnung der Grenzen fällt dahin (vgl. § 5).

Das allgemeine überall endliche Integral auf $F = 0$ ist in homogener Schreibweise

$$\int v_5 (x_1, x_2, x_3)\, dw, \tag{2}$$

wo v_5 die allgemeine ternäre Form 5. Dimension bedeutet, und das Differential

$$dw = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & x_1 & dx_1 \\ a_2 & x_2 & dx_2 \\ a_3 & x_3 & dx_3 \end{vmatrix}}{a_1 x_1^7 + a_2 x_2^7 + a_3 x_3^7} \tag{3}$$

von den Constanten a_i bekanntlich unabhängig ist.*) Aus den einzelnen Termen von v_5 entspringen *die $p = 21$ linear unabhängigen Integrale,* für welche wir nun die Bezeichnung einführen

$$I_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\varepsilon^{-\frac{\gamma+5}{2}}}{\pi} \int_{(0,1,\sqrt{\varepsilon})}^{(x_1, x_2, x_3)} x_1^{\alpha}, x_2^{\beta}, x_3^{\gamma}\, dw. \tag{4}$$

Dabei bedeuten, wie in diesem Capitel immer, α, β, γ alle Zahlentripel, für welche

$$\alpha + \beta + \gamma = 5. \tag{5}$$

*) Clebsch und Gordan, Th. d. Abel'schen Functionen § 4.

Um die Integrale in solche des complexen Argumentes ω oder q umzusetzen, schreiben wir — unter eindeutiger Bestimmung der Wurzeln nach I 5) — für I 27)

$$x_1 : x_2 : x_3 : = \sqrt{\theta_2} : \sqrt{\theta_0} : \sqrt{\varepsilon\theta_3}. \qquad 6)$$

Dann leitet man zur Umrechnung des Differentials dw aus den Jacobi'schen Formeln (Werke II p. 178) leicht die Relationen ab

$$\frac{d\varphi}{\varphi} = \frac{1}{8}\,\theta_0^4\,\frac{dq}{q}, \quad \frac{d\psi}{\psi} = \frac{-1}{8}\,\theta_2^4\,\frac{dq}{q}, \qquad 7)$$

aus denen sich nach einfacher Umsetzung ergibt

$$dw = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\pi}\,\theta_1'}\,\frac{dq}{q} = \frac{i\pi}{8}\sqrt{\varepsilon\,\theta_1\,\theta_2\theta_3}\;d\omega. \qquad 8)$$

Die Integrale erhalten die Gestalt

$$I_{\alpha\beta\gamma}(\omega) = \frac{-i}{8\sqrt{\pi^3}}\int\limits_0 \sqrt{\theta_2^\alpha\theta_0^\beta\theta_3^\gamma\theta_1'}\,\frac{dq}{q} = \frac{1}{8}\int\limits_{i\infty}\sqrt{\theta_2^{\alpha+1}\theta_0^{\beta+1}\theta_3^{\gamma+1}}\,d\omega, \quad 9)$$

und sind damit als *eindeutige Functionen von* θ dargestellt, da die Wurzelzeichen so zu wählen sind, dass

$$I'_{\alpha\beta\gamma}(\omega) = 8\pi\,\frac{d\,I_{\alpha\beta\gamma}(\omega)}{d\omega} = 2^{\frac{\alpha+1}{2}}\,\pi\, q^{\frac{\alpha+1}{8}}\,\Pi_1^\alpha\,\Pi_2^\beta\,\Pi_3^\gamma\,\Pi_4^4. \quad 10)$$

Nun kann man aber auch mittelst der *Landen'schen Transformation* φ, ψ als rationale Quotienten von θ-Werten constanten Argumentes darstellen, und gleichzeitig gelingt es, die in 9) auftretenden *Wurzeln aus* θ*-Producten in Producte je eines transformirten* θ_2, θ_0 *oder* θ_3 *und eines transformirten* θ_1' *zu verwandeln.* Aus den Gleichungen zwischen den θ-Functionen der Parameter ω und 2ω erhält man*) für die speciellen Argumente 0 und $\frac{1}{4}$

*) Weber, Zur Th. d. elliptischen Funct. Acta Math. VI p. 336.

$$\left.\begin{aligned} \theta_0\,\theta_2 &= \theta_2^2\left(\frac{1}{4}, \frac{\omega}{2}\right) \\ 2\,\theta_2\,\theta_3 &= \theta_2^2\left(0, \frac{\omega}{2}\right) \\ \theta_0\,\theta_3 &= \theta_0^2\,(0, 2\omega) \end{aligned}\right\} \quad 11)$$

und durch Differentiation jener Gleichungen, bei speciellen Wertrelationen,

$$\theta_1' = \pi\,\theta_2\,\theta_0\,\theta_3$$

$$\theta_1'\left(\frac{1}{4}, \frac{\omega}{2}\right) = \theta_3^2\,\theta_2\left(\frac{1}{4}, \frac{\omega}{2}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,\theta_2\left(0, \frac{\omega}{2}\right)\theta_0(0, 2\omega)\,\theta_3. \quad 12)$$

Hieraus folgen einerseits für φ, ψ die *Hermite'schen Ausdrücke*

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{\theta_2\left(0, \frac{\omega}{2}\right)}{\theta_1}, \quad \psi = \frac{\theta_0\,(0, 2\,\omega)}{\theta_3} \quad 13)$$

und anderseits, mit der in 10) eingeführten Abkürzung, die 21 Integranden in rationaler Form

$$\left.\begin{array}{lll}
I_{113}' = \theta_3\,\theta_1' & I_{131}' = \theta_0\,\theta_1' & I_{311}' = \theta_2\,\theta_1' \\
I_{212}' = \frac{1}{\sqrt{2}}\theta_2\left(0, \frac{\omega}{2}\right)\theta_1' & I_{221}' = \theta_2\left(\frac{1}{4}, \frac{\omega}{2}\right)\theta_1' & I_{122}' = \theta_0(0, 2\omega)\,\theta_1' \\
I_{005}' = \theta_3\,\theta_1'\left(\frac{1}{4}, \frac{\omega}{2}\right) & I_{050}' = \frac{1}{\sqrt{2}}\theta_0\,\theta_1'\left(0, \frac{\omega}{2}\right) & I_{500}' = 2\,\theta_2\,\theta_1'(0, 2\omega) \\
\left\{\begin{array}{l} I_{023}' = \theta_0\,\theta_1'\left(\frac{1}{4}, \frac{\omega}{2}\right) \\ I_{032}' = \frac{1}{\sqrt{2}}\theta_3\,\theta_1'\left(0, \frac{\omega}{2}\right) \end{array}\right. & \begin{array}{l} I_{203}' = \theta_2\,\theta_1'\left(\frac{1}{4}, \frac{\omega}{2}\right) \\ I_{230}' = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\theta_2\,\theta_1'\left(0, \frac{\omega}{2}\right) \end{array} & \begin{array}{l} I_{302}' = 2\,\theta_3\,\theta_1'(0, 2\omega) \\ I_{320}' = 2\,\theta_0\,\theta_1'(0, 2\omega) \end{array} \\
\left\{\begin{array}{l} I_{014}' = \theta_0(0,2\omega)\,\theta_1'\left(\frac{1}{4}, \frac{\omega}{2}\right) \\ I_{041}' = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\theta_0(0,2\omega)\,\theta_1'\left(0, \frac{\omega}{2}\right) \end{array}\right. & \begin{array}{l} I_{104}' = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\theta_2\left(0, \frac{\omega}{2}\right)\theta_1'\left(\frac{1}{4}, \frac{\omega}{2}\right) \\ I_{140}' = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\theta_2\left(\frac{1}{4}, \frac{\omega}{2}\right)\theta_1'\left(0, \frac{\omega}{2}\right) \end{array} & \begin{array}{l} I_{401}' = \sqrt{2}\,\theta_2\left(0, \frac{\omega}{2}\right)\theta_1'(0, 2\omega) \\ I_{410}' = 2\,\theta_2\left(\frac{1}{4}, \frac{\omega}{2}\right)\theta_1'(0, 2\omega) \end{array}
\end{array}\right\} \quad 14)$$

Man bemerke, dass jeder Ausdruck ein $\theta_1'(0)$ od. $\theta_1'\left(\frac{1}{4}\right)$ enthält.

Insbesondere zeichnen sich die Integrale der I. Gruppe dadurch aus, dass sie keine transformirten θ enthalten, und sie characterisiren sich so als *die drei unabhängigen Integrale auf der Curve 4. Ordnung* $p = 3$ [I 27)], wie auch eine einfache directe Ueberlegung zeigt.

§ 11.

Periodicität und lineare Transformation der Integrale.*)

Die Integrale sind als Functionen des Ortes auf der Riemann'schen Fläche $p = 21$ unendlich-vieldeutig. Jede solche Function ändert im allgemeinen ihren Wert, wenn man sie zur Ausgangsstelle längs eines geschlossenen Weges zurückführt, der weder auf der Fläche in einen Punkt zusammengezogen werden kann, noch Verzweigungspunkte der Function umschliesst. Durchläuft aber ω in seiner Halbebene beliebige geschlossene Wege, so sind die entsprechenden Wege auf der Fläche offenbar stets in Punkte zusammenziehbar. *Daher ist jede zur Fläche gehörige Function von* ω, *welche auf derselben keine Verzweigungspunkte besitzt, also insbesondere jedes zugehörige überall endliche Integral, notwendig eine eindeutige Function von* ω.

Auch den Wegen zwischen relativ äquivalenten Punkten ω, ω' der Halbebene entsprechen auf der Fläche geschlossene Wege. Diese lassen sich wiederum auf Punkte zusammenziehen, wenn die zwischen ω, ω' vermittelnde Substitution der erweiterten Congruenzgruppe parabolisch oder elliptisch ist, denn eine solche bewirkt im wesentlichen nur eine Drehung der Halbebene um je einen festbleibenden Punkt derselben (p. 11). Bei diesen Substi-

*) Vgl. Hurwitz, Classenzahlrelationen Ann. XXV p. 170, 188.

tutionen ändern sich also die Integrale wiederum nicht, dagegen ändern sie sich bei den hyperbolischen Substitutionen, welchen nicht-zusammenziehbare Wege entsprechen, um additive Constanten, weil die Differentiale invariant sind. Umgekehrt *können die Integrale erster Gattung auf der Fläche* $p = 21$ *geradezu definirt werden als die eindeutigen, überall endlichen Functionen von* ω, *welche der Functionalgleichung genügen* [T beliebige Substitution der Gruppe (T, V)]

$$I_{\alpha\beta\gamma}(T(\omega)) = I_{\alpha\beta\gamma}(\omega) + \mathrm{P}^{(T)}_{\alpha\beta\gamma}\,. \qquad 15)$$

Damit erfährt der Begriff der Modulfunctionen eine naturgemässe Erweiterung, wie sie zuerst Herr Hurwitz in den citirten Abhandlungen gab.

Verwandelt man die Fläche durch ein System von Querschnitten in einen Fundamentalbereich (p. 15), z. B. das symmetrische Polygon der Figur, so ist jedes Integral innerhalb desselben eine eindeutige Function des Ortes, erleidet aber beim Ueberschreiten jeder Schnittstrecke eine Aenderung um eine zugehörige Periode. Es gibt nun insbesondere Systeme von $2p$ Rückkehrschnitten und Querschnitten, welchen $2p$ unabhängige Perioden jedes Integrals zugehören, durch deren lineare ganzzahlige Combinationen die allgemeinsten Perioden derselben darstellbar sind. Legen wir also die schon p. 18 postulirte Anordnung des Fundamentalpolygons zu Grunde, so sind zufolge der Definition der erzeugenden Substitutionen die Verbindungslinien zusammengehöriger Randpunkte *Periodenwege*, und jede erzeugende, hyperbolische Substitution $E_\lambda^{\lambda'}$ ergibt ein *System von p simultanen Fundamentalperioden*

$$I_{\alpha\beta\gamma}\left(E_\lambda^{\lambda'}(\omega)\right) - I_{\alpha\beta\gamma}(\omega) = \pi^{(\lambda,\lambda')}_{\alpha\beta\gamma}\,. \qquad 16)$$

Für die parabolischen Substitutionen haben wir dagegen (siehe oben)

$$I_{\alpha\beta\gamma}(\omega+16)=I_{\alpha\beta\gamma}(\omega),\quad I_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{\omega}{1-16\omega}\right)=I_{\alpha\beta\gamma}(\omega). \tag{17}$$

In eine genauere Untersuchung dieser Fundamentalsysteme brauchen wir jedoch nicht einzutreten, weil sich sofort eine noch einfachere Darstellung der Perioden durch nur 12 Grössen ergeben wird.

Allgemein erfahren die Integrale bei den linearen ω-Substitutionen selbst lineare Transformationen. Das Differential dw ist bei den Substitutionen I 33) der Gruppe Γ invariant, also bleibt nur die Aenderung von $x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma =$ $= \varepsilon^{\frac{\gamma+5}{2}\pi} \frac{dI_{\alpha\beta\gamma}}{dw}$ nach jenen Formeln in Betracht zu ziehen. Demnach ist bei der Grundoperation **S**

$$I_{\alpha\beta\gamma}(\omega+1)=\varepsilon^{\frac{\alpha+1}{2}} I_{\alpha\gamma\beta}(\omega), \tag{18}$$

da nach 17) keine Constante zutritt. Dagegen muss bei **T**

$$I_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{-1}{\omega}\right)=-I_{\beta\alpha\gamma}(\omega)+p_{\alpha\beta\gamma} \tag{19}$$

je eine von Null verschiedene Constante dazukommen, weil das Integral $I_{\alpha\beta\gamma}(\omega)$ nicht lauter Perioden Null haben kann. Infolge der Bedeutung von **S** und **T** sind *die sämmtlichen Periodensysteme lineare Aggregate der $p_{\alpha\beta\gamma}$ mit ganzzahligen Coefficienten.* Indessen sind von diesen Constanten nur 12 unabhängig, denn, weil **T** die Periode 2 hat [vgl. auch 17)], ist

$$p_{\alpha\beta\gamma}=p_{\beta\alpha\gamma}\,. \tag{20}$$

Bei den erzeugenden Substitutionen der Gruppe Γ hat man also

$$\left.\begin{aligned} I_{\alpha\beta\gamma}(\mathsf{S}^2(\omega)) &= \varepsilon^{\alpha+1} I_{\alpha\beta\gamma}(\omega) \\ I_{\alpha\beta\gamma}(\mathsf{T}(\omega)) &= -I_{\beta\alpha\gamma}(\omega) + p_{\alpha\beta\gamma} \\ I_{\alpha\beta\gamma}(\mathsf{U}(\omega)) &= \varepsilon^{\frac{\beta-\gamma}{2}} I_{\gamma\alpha\beta}(\omega) + \varepsilon^{-\frac{\alpha+1}{2}} p_{\gamma\alpha\beta}. \end{aligned}\right\} \quad 21)$$

Hiernach ordnen sich die Integrale in *5 Gruppen* — siehe die Ziffern I bis V in 14) — derart, dass die Angehörigen einer Gruppe durch lineare ω-Transformation in einander, nicht aber in solche anderer Gruppen übergeführt werden können. Die Gruppen sind durch die, abgesehen von Permutationen der Indices, verschiedenen Zahlentripel characterisirt

I 113, II 221, III 005, IV 023, V 014. 21)

Für die Aenderung bei einer Substitution W von G, deren *Decomposition* in Grundoperationen nach I 34) man kennt, hat man nach 21) die Formel [mit denselben Bezeichnungen wie I 34)]

$$\left.\begin{aligned} I_{\alpha\beta\gamma}(W(\omega)) &= \varepsilon^{\lambda(\alpha+1)+\mu(\beta+1)+\frac{\gamma''-\gamma}{2}+4\tau} I_{\alpha'\beta'\gamma'}(\omega) + K_{\alpha\beta\gamma}, \\ \text{wo} \quad \gamma'' &= \mathsf{U}^{-\sigma}(\gamma),\ (\alpha', \beta', \gamma) = \mathsf{U}^{-\sigma}\mathsf{T}^{-\tau}(\alpha, \beta, \gamma) \end{aligned}\right\} \quad 22)$$

und auch $K_{\alpha\beta\gamma}$ leicht zu ermitteln ist. Jedoch ist letzteres unnötig, denn weiterhin darf stets von zutretenden Perioden abgesehen werden, da diese für das Abel'sche Theorem ohne Belang sind. *Integralgleichungen der folgenden Paragraphen stehen daher an Stelle von Congruenzen modulis Perioden.* Die Formel ergibt z. B., unter Ausrechnung der Constanten, für die in II 26) vorkommende Substitution $(\mathsf{S}^8\mathsf{T})^2$

$$\left.\begin{aligned} I_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{-5\,\omega}{3}\right) &= (-1)^{\gamma+1} I_{\alpha\beta\gamma}(\omega) & (\beta \text{ ungerade}) \\ I_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{-5\,\omega}{3}\right) &= (-1)^{\gamma+1} I_{\alpha\beta\gamma}(\omega) + 2(-1)^{\alpha+1} p_{\alpha\beta\gamma} & (\beta \text{ gerade}). \end{aligned}\right\} \quad 23)$$

Bemerkt sei übrigens, dass man auch ohne Kenntnis der Decomposition von W, von dem allgemeinen Ansatz aus

$$I_{\alpha\beta\gamma}(W(\omega)) = \sum_{\alpha',\beta'} k_{\alpha\beta\gamma}^{(\alpha'\beta'\gamma')} I_{\alpha'\beta'\gamma'}(\omega) + K_{\alpha\beta\gamma}, \tag{24}$$

nach einem Verfahren zum Ziel gelangt, welches darauf beruht, dass auf ω und $W(\omega)$ gleichzeitig, möglichst einfach zu wählende, Substitutionen S und $S' = W^{-1} SW$ angewendet und durch Coëfficientenvergleichung Relationen gewonnen werden. Man vergleiche dafür die Methode der Coefficientenbestimmung im folgenden Paragraphen.

§ 12.

Die Integralsummen des Abel'schen Theorems.

Das Abel'sche Theorem verlangt die Bildung der $p=21$ Summen der Integralwerte für die, nach II 25) zu wählenden, Parameter $R_i(\omega)$ der Punkte unserer Hauptcorrespondenz als obere Grenzen

$$\sum_{i=1}^{N} I_{\lambda\mu\nu}(R_i(\omega)) = J_{\lambda\mu\nu}(\omega) \quad (\lambda+\mu+\nu=5). \tag{25}$$

Nun ändert sich aber infolge von 16) und II 10) eine solche Summe nur um eine additive Constante, wenn man ω durch eine relativ äquivalente Zahl ersetzt, denn, abgesehen von Constanten, werden nur die Summanden vertauscht. *Die Summen* $J_{\lambda\mu\nu}(\omega)$ haben so auf der Riemann'schen Fläche denselben Character wie die $I_{\lambda\mu\nu}(\omega)$, *sind also nach p. 48 selbst Integrale erster Gattung.* Man hat so den *allgemeinen Ansatz*

$$J_{\lambda\mu\nu}(\omega) = \sum_{\alpha,\beta} c_{\lambda\mu\nu}^{(\alpha\beta\gamma)} I_{\alpha\beta\gamma}(\omega) + C_{\lambda\mu\nu}. \tag{26}$$

Die Coefficienten bestimmen sich, indem wir auf beide Seiten der Gleichung die simultanen Collineationen des § 8 anwenden. Unterwerfen wir nach einander das Argument ω der $I_{\alpha\beta\gamma}(\omega)$ den Substitionen $\mathsf{S}^2, \mathsf{T}, \mathsf{U}$ und gleichzeitig die Argumente $R_i(\omega)$ der $I_{\lambda\mu\nu}(R_i(\omega))$ den Substitutionen $\overline{\mathsf{S}}^2, \overline{\mathsf{T}}, \overline{\mathsf{U}}$ von II 32), so gehen $J_{\lambda\mu\nu}$ und $I_{\alpha\beta\gamma}$ gemäss 21) über in

$$\left.\begin{array}{ll} \varepsilon^{n(\lambda+1)} J_{\lambda\mu\nu} & \varepsilon^{\alpha+1} I_{\alpha\beta\gamma} \\ \left(\frac{2}{n}\right)^{\nu} J_{\mu\lambda\nu} & -I_{\beta\alpha\gamma} \\ -\left(\frac{2}{n}\right)^{\mu} \varepsilon^{n\frac{\mu-\nu}{2}} J_{\nu\lambda\mu} & \varepsilon^{\frac{\beta-\gamma}{2}} I_{\gamma\alpha\beta}, \end{array}\right\} \qquad 27)$$

abgesehen von additiven Constanten. Soll der Ansatz 26) eine Identität werden, so folgen aus 27) Relationen für die Coefficienten desselben. So kommt durch S^2 und T einerseits $C_{\lambda\mu\nu} = 0$, anderseits das Resultat, dass nur derjenige Term $I_{\lambda'\mu'\nu'}(\omega)$ der rechten Seite von 26) einen von Null verschiedenen Coefficienten haben kann, in welchem λ', μ', ν' solche positive Wurzeln der Congruenzen

$$\left.\begin{array}{l} \lambda' + 1 \equiv n(\lambda + 1) \\ \mu' + 1 \equiv n(\mu + 1) \mod. 8 \\ \nu' + 1 \equiv n(\nu + 1) \end{array}\right\} \qquad 28)$$

bedeuten, die der Gleichung genügen

$$\lambda' + \mu' + \nu' = 5. \qquad 29)$$

Es ist also gemäss 28) und 29) einfacher anzusetzen

$$J_{\lambda\mu\nu}(\omega) = c_{\lambda\mu\nu}^{(n)} I_{\lambda'\mu'\nu'}(\omega). \qquad 30)$$

Nach der zweiten und dritten Zeile von 27) bestehen aber zwischen den Constanten $c_{\lambda\mu\nu}^{(n)}$, welche zu derselben Gruppe

von Integralen (p. 51) gehören, lineare Relationen, welche sich zusammenfassen lassen in

$$\left(\frac{2}{n}\right)^{\lambda} \varepsilon^{\frac{n\nu-\nu'}{2}} c_{\lambda\mu\nu}^{(n)} = \text{const.} \tag{31}$$

bei allen Indexpermutationen.

Daher verschwinden die Integralsummen jeder Gruppe stets nur gleichzeitig. Zugleich mit dem Verschwinden einer Summe $J_{\lambda\mu\nu}(\omega)$ der Hauptcorrespondenz erhalten die der nämlichen Classe angehörigen Integralsummen $J_{\lambda\mu\nu}(W(\omega))$ aller Correspondenzen constante Werte, denn zufolge II 13) und § 11 sind die letzteren lineare Aggregrate der $I_{\lambda\mu\nu}(\omega)$.

Nun lassen sich die Congruenzen 28) nicht immer durch drei Zahlen λ', μ', ν' erfüllen, für die auch 29) besteht. Ist dies der Fall für gegebene Zahlen n, λ, μ, ν, so gibt es kein Integral, welches der Gleichung 26) genügte und von Null verschieden wäre. Man findet aber folgende Lösungssysteme:

	$\lambda\ \mu\ \nu$	$\lambda'\ \mu'\ \nu'$ $n \equiv 1$	3	5	7 mod. 8
I	1 1 3	1 1 3	—	1 1 3	—
II	2 2 1	2 2 1	0 0 5	—	—
III	0 0 5	0 0 5	2 2 1	—	—
IV	0 2 3	0 2 3	2 0 3	—	—
V	0 1 4	0 1 4	—	4 1 0	—

32)

Demnach verschwinden die sämmtlichen Integralsummen $J_{\lambda\mu\nu}(\omega)$ für alle Transformationsgrade $n \equiv 7$ mod. 8. Also bilden dann die N-punktigen Correspondenzgruppen Schnittpunktsysteme mit Curven der Ordnung $m = \frac{N}{8}$. Wenn wir den Beweis des § 15 anticipiren, so schliessen wir

hieraus: *Die Modularcorrespondenzen der Transformationsgrade*

$$n \equiv 7 \text{ mod. } 8 \qquad 33)$$

sind Schnittsystem-Correspondenzen und durch eine einzige Gleichung darstellbar.

Für die Transformationsgrade $n \equiv 5$ mod. 8 verschwinden nach der Tabelle von den Integralsummen die der I. und V. Gruppe, für $n \equiv 3$ mod. 8 die der Gruppen II, III, IV, und endlich für $n \equiv 1$ mod. 8 im allgemeinen keine. Aber die Integralsummen können möglicherweise auch für specielle Werte von n verschwinden. *Daher bleibt die Abhängigkeit der Constanten* $c_{\lambda\mu\nu}^{(n)}$ *von* n *zu bestimmen und insbesondere zu untersuchen, für welche* n $c_{\lambda\mu\nu}^{(n)} = 0$ *ist.*

Nun gelten aber die vorigen Sätze ohne weiteres auch für die reducibelen Correspondenzen der Grade n, denn dies folgt nach II 40) daraus, dass sie wegen $n \equiv \frac{n}{k^2}$ mod. 8 (vgl. II 15) für alle irreducibelen Correspondenzen der Grade $\frac{n}{k^2}$ auszusprechen sind.

Insbesondere vereinfacht sich aber die zuletzt geforderte Untersuchung, wenn wir sie, statt an den (N, N)-deutigen Correspondenzen, an den $(\Phi(n), \Phi(n))$-deutigen reducibelen Correspondenzen durchführen.

Es mögen also weiterhin gemäss II 15) die irreducibelen Correspondenzen aller Grade $\frac{n}{k^2}$ *zu der reducibelen Correspondenz* n*. Grades zusammengefasst werden.* Dann betrachten wir unter $J_{\lambda\mu\nu}(\omega)$ an Stelle der N-gliedrigen Summen 25) die $\Phi(n)$-gliedrigen Integralsummen

$$J_{\lambda\mu\nu}(\omega) = \sum_{A} \sum_{C=0}^{A-1} I_{\lambda\mu\nu}(R_i(\omega)) = c_{\lambda\mu\nu}^{(n)} I_{\lambda'\mu'\nu'}(\omega), \qquad 34)$$

in welchen über alle Teiler A von n und volle Restsysteme

C mod. A summirt wird, da die $R_i(\omega)$ von den Ω_{AC} eindeutig abhängen [II 25)]. Die bisherigen Entwickelungen bleiben auch für die neuen $J_{\lambda\mu\nu}$ in Kraft.

§ 13.

Reihenentwickelungen der Integrale.

Wir recurriren nun auf die Reihenentwickelungen der Integrale selbst, nachdem wir in $J_{\lambda\mu\nu}$ als Repräsentanten, je nachdem in $\Omega_{AC} = \frac{16\,C + D\omega}{A}\left(\frac{2}{A}\right) = \pm 1$ ist, Ω_{AC} oder $-\frac{5}{3}\,\Omega_{AC}$ mod. 16 [vgl. II 25)] wirklich eingesetzt haben. Auf Integrale der Form $I_{\lambda\mu\nu}(\Omega_{AC})$ vermöge 23) zurückgeführt, lautet dann 34)

$$J_{\lambda\mu\nu}(\omega) = \sum_{A^2 \equiv 1} I_{\lambda\mu\nu}(\Omega_{AC}) + (-1)^{\nu+1} \sum_{A^2 \equiv 9} I_{\lambda\mu\nu}(\Omega_{AC}) + j_{\lambda\mu\nu}, \tag{35}$$

wo $j_{\lambda\mu\nu}$ eine Constante ist, auf deren Wert es nicht weiter ankommt. Betrachten wir zunächst nur solche Integrale jeder Gruppe, deren Index ν *ungerade* ist, so vereinigen sich auch noch die beiden Summen in 35) so, dass

$$\sum_{A} \sum_{C=0}^{A-1} I_{\lambda\mu\nu}\left(\frac{16\,C + D\omega}{A}\right) + j_{\lambda\mu\nu} = c_{\lambda\mu\nu}^{(n)}\, I_{\lambda'\mu'\nu'}(\omega)\,. \tag{36}$$

Die Reihenentwickelungen können wir in der Form ansetzen

$$i\,I_{\lambda\mu\nu} = \sum_{k \equiv \lambda+1} \frac{1}{k}\, \Psi_{\lambda\mu\nu}(k)\, q^{\frac{k}{8}},\quad i\,I_{\lambda'\mu'\nu'} = \sum_{k' \equiv \lambda'+1} \frac{1}{k'}\, \Psi_{\lambda'\mu'\nu'}(k')\, q^{\frac{k'}{8}}, \tag{37}$$

wo stets nur über congruente Werte k, resp. k' summirt wird, gemäss

$$k \equiv \lambda + 1,\ k' \equiv \lambda' + 1 \equiv nk \text{ mod. } 8\,. \tag{38}$$

Nun tritt aber in den Integralen $I_{\lambda\mu\nu}(\Omega_{AC})$ an Stelle von $q^{\frac{k}{8}}$ $e^{2ki\pi\frac{C}{A}} q^{\frac{k}{8}\frac{D}{A}}$, so dass

$$\sum_{A,C} I_{\lambda\mu\nu}(\Omega_{AC}) = \sum_k \frac{1}{k} \Psi_{\lambda\mu\nu}(k) \sum_{A,C} e^{2ki\pi\frac{C}{A}} q^{\frac{k}{8}\frac{D}{A}}. \qquad 39)$$

Bekanntlich ist aber

$$\sum_{C=0}^{A-1} e^{2ki\pi\frac{C}{A}} = 0 \text{ oder } A, \qquad 40)$$

letzteres nur dann, wenn k ein Vielfaches von A ist. Damit erscheint 36) umgeformt in

$$\sum_k \sum_A A \cdot \frac{1}{k} \cdot \Psi_{\lambda\mu\nu} q^{\frac{k}{8}\frac{D}{A}} = c_{\lambda\mu\nu}^{(n)} \sum_{k'} \frac{1}{k'} \Psi_{\lambda'\mu'\nu'}(k') q^{\frac{k'}{8}}, \qquad 41)$$

wo nun die Coefficienten derselben Potenzen von q zu vergleichen sind. Dies liefert für die Exponenten k, k' neben 38) die Bedingung

$$kD = k'A, \qquad 42)$$

woraus $D = t$ *als gemeinsamer Teiler von* n *und* $k' = h$, ferner $k = \frac{hn}{t^2}$ folgt. So gewinnt man *zwischen den Coefficienten der Entwickelungen verschiedener Integrale die Relation*

$$c_{\lambda\mu\nu}^{(n)} \Psi_{\lambda'\mu'\nu'}(h) = \sum_t t\, \Psi_{\lambda\mu\nu}\left(\frac{hn}{t^2}\right) \quad h \equiv \lambda' + 1 \text{ mod. } 8, \qquad 43)$$

summirt über alle gemeinsamen Teiler t der Zahlen n und h, während h der beigesetzten Congruenz 38) genügt. Doch gilt dies nur für ungerades ν, aber *bei geradem* ν tritt dafür einfach ein

$$c_{\lambda\mu\nu}^{(n)} \Psi_{\lambda'\mu'\nu'}(h) = \left(\frac{2}{n}\right) \sum_t \left(\frac{2}{t}\right) t\, \Psi_{\lambda\mu\nu}\left(\frac{hn}{t^2}\right). \qquad 44)$$

Ist dann insbesondere h' *eine zu* n *relativ prime Zahl*, so ist

$$c^{(n)}_{\lambda\mu\nu} = \left(\frac{2}{n}\right)^{\nu+1} \frac{\Psi_{\lambda\mu\nu}(h'n)}{\Psi_{\lambda'\mu'\nu'}(h')} \tag{45}$$

Die Formel führt die Abhängigkeit des $c^{(n)}_{\lambda\mu\nu}$ von n explicite ein und zeigt, *dass (mit* $c^{(n)}_{\lambda\mu\nu}$*) die Integralsumme* $J_{\lambda\mu\nu}$ *verschwindet, wenn in der Entwickelung von* $I_{\lambda\mu\nu}$ *der Coefficient einer gewissen* h'*. Potenz von* $q^{\frac{n}{8}}$ *Null ist.*

Zur expliciten Darstellung der Bedingungen für $c^{(n)}_{\lambda\mu\nu} = 0$ bedürfen wir der Kenntnis der *Bildungsgesetze der* $\Psi_{\lambda\mu\nu}$ in den Reihen für $I'_{\lambda\mu\nu}$ [10)]:

$$I'_{\lambda\mu\nu}(\omega) = \pi \sum_{k=\lambda+1} \Psi_{\lambda\mu\nu}(k)\, q^{\frac{k}{8}}\,. \tag{46}$$

Zur Entwickelung der 21 θ-Producte 14) hat man die bekannten Reihen (r unger. > 0, r' unger., s gerade $\gtrless 0$):

$$\left.\begin{aligned}
&\theta_0 = \sum_{-\infty}^{\infty}(-q)^{s^2}, \quad \theta_3 = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{s^2}, \quad \theta_2 = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{\frac{r'^2}{4}}\\
&\theta_1' = 2\pi \sum_{1}^{\infty}\left(\frac{-1}{r}\right) r\, q^{\frac{r^2}{4}}\\
&\theta_2\left(\frac{1}{4}, \frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2}{r'}\right) q^{\frac{r'^2}{8}}, \quad \theta_1'\left(\frac{1}{4}, \frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{2}\pi \sum_{1}^{\infty}\left(\frac{-2}{r}\right) r\, q^{\frac{r^2}{8}}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Aus den Producten 14) folgt für $\Psi_{\lambda\mu\nu}(k)$ im wesentlichen die Gestalt $\Sigma(-1)^{f(r,s)} r$. Insbesondere treten die Summen auf

$$\Sigma\left(\frac{-1}{r}\right) r, \quad \Sigma\left(\frac{-2}{r}\right) r \qquad (ar^2 + bs^2 = k); \tag{48}$$

in dieser Schreibweise soll angedeutet sein, *dass die Summen jeweilen zu erstrecken sind über alle positiven unge-*

raden Zahlen r, welche, zusammen mit einer positiven oder negativen Zahl s), die ganzzahligen Lösungen der beigefügten quadratischen Gleichung sind.* Dabei ist k als Entwickelungsexponent von bestimmter Gestalt modulo 8. *Die k (im Sinne der Zahlentheorie) darstellende quadratische Form negativer Determinante kommt unmittelbar auf die Formen der Determinanten —1 und —2 zurück.*

Zur Definition der $\Psi_{\lambda\mu\nu}(k)$ erhält man aus 14) folgende Tabelle:

$$\left.\begin{array}{ll}
\Psi_{113}(k)=2\Sigma\left(\frac{-1}{r}\right)r & 2(r^2+s^2)=k\equiv 2 \bmod. 8 \\
\Psi_{311}(k)=2\Sigma\left(\frac{-1}{r}\right)r & 2(r^2+s^2)=k\equiv 4 \\
\Psi_{212}(k)=\sqrt{2}\,\Sigma\left(\frac{-1}{r}\right)r & 2r^2+s^2=k\equiv 3 \\
\Psi_{122}(k)=(-1)^{\frac{k-2}{16}}\sqrt{2}\,\Sigma\left(\frac{-2}{r}\right)r & 2(r^2+2s^2)=k\equiv 2 \\
\Psi_{050}(k)=\sqrt{2}\,\Sigma\left(\frac{-1}{r}\right)r & r^2+2s^2=k\equiv 1 \\
\Psi_{500}(k)=4\Sigma\left(\frac{-1}{r}\right)r & 2(2r^2+s^2)=k\equiv 6 \\
\Psi_{032}(k)=\sqrt{2}\,\Sigma\left(\frac{-1}{r}\right)r & r^2+2s^2=k\equiv 1 \\
\Psi_{230}(k)=\sqrt{2}\,\Sigma\left(\frac{-1}{r}\right)r & r^2+2s^2=k\equiv 3 \\
\Psi_{302}(k)=4\Sigma\left(\frac{-1}{r}\right)r & 4(r^2+2s^2)=k\equiv 4 \\
\Psi_{104}(k)=\ \Sigma\left(\frac{-2}{r}\right)r & r^2+s^2=k\equiv 2 \\
\Psi_{401}(k)=2\sqrt{2}\,\Sigma\left(\frac{-1}{r}\right)r & (2r)^2+s^2=k\equiv 5 \\
\text{und etwas abweichend,} & \\
\Psi_{014}(k)=\sqrt{2}\,\Sigma(-1)^{\frac{k-r^2}{16}}\left(\frac{-1}{r}\right)r & r^2+s^2=k\equiv 1
\end{array}\right\} \quad 49)$$

*) Der Summand r ist also für $s=0$ einmal, für $\pm s \gtrless 0$ zweimal zu setzen, so dass die $\Psi_{\lambda\mu\nu}(k)$ für alle Quadrate k ungerade, sonst stets gerade Zahlen sind.

Nun ist für jede Gruppe von Integralen in 32) je ein Coefficient $c^{(n)}_{\lambda\mu\nu}$ nach 45) zu berechnen. Wählen wir λ conform einer der Congruenzen $n(\lambda+1)\equiv 1$ oder $2 \bmod. 8$ und setzen zugleich $h' = 1$ oder 2 (vgl. 43), so ergeben sich als die einfachsten Formeln:

$$\left.\begin{array}{ll}
n\equiv 5 \bmod. 8 & c^{(n)}_{113}=\frac{1}{2}\Psi_{113}(2n),\ c^{(n)}_{104}=\frac{-1}{2}\Psi_{104}(2n);\\
n\equiv 3 & c^{(n)}_{212}=\frac{-1}{\sqrt{2}}\Psi_{212}(n),\ c^{(n)}_{500}=\frac{-1}{2}\Psi_{500}(2n),\ c^{(n)}_{230}=\frac{-1}{\sqrt{2}}\Psi_{230}(n);\\
n\equiv 1 & \left\{\begin{array}{l} c^{(n)}_{122}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_{122}(2n),\ c^{(n)}_{050}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_{050}(n),\ c^{(n)}_{032}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_{032}(n),\\ c^{(n)}_{113}=\frac{1}{2}\Psi_{113}(2n),\ c^{(n)}_{104}=\frac{1}{2}\Psi_{104}(2n). \end{array}\right.
\end{array}\right\} \quad 50)$$

Zwischen den zahlentheoretischen Functionen $\Psi_{\lambda\mu\nu}(k)$ bestehen aber zahlreiche *Wertrelationen.* Man findet z. B. leicht direct

$$\Psi_{311}(2n) = \left(\frac{2}{n}\right) 2\, \Psi_{113}(2n).^{*)}$$

Relationen zwischen den $\Psi_{\lambda\mu\nu}(k)$ je derselben Integralgruppe liefert namentlich die Verbindung von 45) mit 31). So wird z. B. die Tabelle 49) vervollständigt durch die Angabe

$$\Psi_{\lambda\mu\nu}(k) = (-1)^{\frac{k-\lambda-1}{8}}\, \Psi_{\lambda\nu\mu}(k). \qquad 51)$$

Formeln anderer Art entspringen aus 45) mit 43) oder 44), z. B.

$$\Psi_{104}(h)\, \Psi_{104}(2n) = 2\Psi_{104}(hn) \quad (h \text{ prim zu } n). \qquad 52)$$

---

*) Es ist $\Psi_{113}(2n)$ dieselbe Summe, welche sich als $\Omega(n)$ bei Herrn Hurwitz (Gött. Nachr. l. c.) und bei Herrn Kronecker „Ueber quadr. Formen von negat. Determinante“ (Monatsb. d. Berl. Ac. 1875 p. 225) findet.

Endlich liefert die Vergleichung in der Tabelle 49) unmittelbar Relationen zwischen Coefficienten verschiedener Integralgruppen, z. B.

$$n \equiv 3,\ \Psi_{500}(2n) = 2\sqrt{2}\,\Psi_{212}(n),\quad n \equiv 1,\ \Psi_{050}(n) = \Psi_{032}(n). \qquad 53)$$

Mittelst solcher Formeln lässt sich der Nachweis erbringen, *dass die Coefficienten 50) für ein gegebenes n dann und nur dann zu Null werden, wenn einfach*

$$\left.\begin{array}{lll} \text{für } n \equiv 5 \bmod. 8 & \Sigma\left(\frac{-1}{r}\right) r = 0 & (r^2 + s^2 = n) \\ n \equiv 3 & \Sigma\left(\frac{-1}{r}\right) r = 0 & (r^2 + 2s^2 = n) \\ n \equiv 1 & \Sigma\left(\frac{-1}{r}\right) r = 0 & (r^2 + s^2 = n,\ r^2 + 2s^2 = n) \end{array}\right\} \quad 54)$$

§ 14.

Zahlentheoretische Kriterien des Transformationsgrades.

Ein Vergleich mit 49) lehrt, dass die Summen $\Psi_{\lambda\mu\nu}(n)$ und $\Psi_{\lambda\mu\nu}(2n)$ je einer Zeile von 50) sich nach 48) auf Darstellungen von n durch Formen je derselben Determinante beziehen. Eine solche Summe hat aber gemäss ihrer Definition 48) den Wert Null, wenn k überhaupt nicht durch die zugehörige Form $ar^2 + bs^2$ darstellbar ist. Infolge dieser Bemerkungen ist die Forderung, dass n durch die Form $\begin{matrix} r^2 + s^2 \\ r^2 + 2s^2 \end{matrix}$ nicht darstellbar sei, *hinreichend*, damit für die Integralgruppen $\begin{matrix} 113,014 \\ 221,005,023 \end{matrix}$ $c_{\lambda\mu\nu}^{(n)} = 0$ werde. Diese *Bedingung der Nicht-Darstellbarkeit* ist aber auch als *notwendig* erkannt, wenn nachgewiesen wird, dass nie $\Sigma\left(\frac{-1}{r}\right) r = 0$ sein kann, sobald n durch $r^2 + s^2$ oder $r^2 + 2s^2$ überhaupt darstellbar ist.

Unter Voraussetzung dieses Beweises kommen wir also einerseits zu einem indirecten Beweis von 54), anderseits zu dem Satze: *Damit die reducibele Correspondenz n. Grades volle Schnittpunktsysteme liefere, ist notwendig und hinreichend, dass*

$$\left.\begin{array}{lll} n\equiv 5 \text{ mod. } 8 & \textit{nicht durch } r^2+s^2 & \\ n\equiv 3 & \textit{nicht durch } r^2+2s^2 & \\ n\equiv 1 & \textit{weder durch } r^2+s^2 \textit{ noch durch } r^2+2s^2 \end{array}\right\} \quad 55)$$

darstellbar ist.

Damit aber die Zahl n durch Formen der Determinante -1, resp. -2 nicht darstellbar sei, ist notwendig und hinreichend, dass sie, nach Absonderung aller quadratischen Factoren, irgend einen Primfactor der Form $4h+3$, resp. einen der Formen $8h+5$, $8h+7$ enthalte. Umgekehrt lässt sich bekanntlich jede Primzahl der Form $p_k = 4h+1$ stets und nur auf eine Weise in zwei Quadrate

$$p_k = a_k^2 + b_k^2 \quad (a_k \text{ ungerade, } b_k \text{ gerade}), \qquad 56)$$

jede Primzahl von einer der Formen $p_k = 8h+1$, $p'_k = 8h+3$ ebenso eindeutig in ein Quadrat und ein doppeltes Quadrat zerlegen

$$p_k = a_k^2 + 2b_k^2,\ p'_k = a_k'^2 + 2b_k'^2\ (a_k, a'_k, b'_k \text{ ungerade, } b_k \text{ gerade}). \quad 57)$$

Betrachten wir nun die Darstellungen zusammengesetzter Zahlen. Sei zuerst $n' = p_1 p_2 \dots p_\mu$ das Product lauter verschiedener Primzahlen der Form $p_k = 4h+1$; stellen wir dann jedes p_k nach 56) dar und bilden

$$A + Bi = \prod_{k=1}^{\mu} (a_k + b_k i), \qquad 58)$$

so finden wir sämmtliche Darstellungen

$$n' = A^2 + B^2 \quad (A \text{ ungerade, } B \text{ gerade} \gtrless 0), \qquad 59)$$

indem wir bei den b_k alle Vorzeichenwechsel vornehmen, und erhalten so 2^μ Zahlenpaare A, B. Dann wird

$$A = \Pi a_k - \Sigma b_1 b_2 a_3 \ldots a_\mu + \Sigma b_1 b_2 b_3 b_4 a_5 \ldots a_\mu - \ldots \equiv \prod_{k=1}^{\mu} a_k \bmod. 4, \quad 60)$$

also sind *alle 2^μ darstellenden Zahlen A modulo 4 congruent*, und in der Summe aller A zerstören sich die sämmtlichen $\pm b_k$ enthaltenden Summanden. Bezeichnet man nun den absoluten Wert von A mit r, so sind alle A entweder von der Form $\left(\frac{-1}{r}\right) r$ oder $-\left(\frac{-1}{r}\right) r$; somit ist

$$\Sigma A = \pm \Sigma \left(\frac{-1}{r}\right) r = 2^\mu \prod_{k=1}^{\mu} a_k \gtrless 0 \quad (r^2 + s^2 = n'). \quad 61)$$

Sei ferner $n' = p_1 \ldots p_\mu \, p'_1 \ldots p'_{\mu'}$ das Product lauter verschiedener Primzahlen $p_k = 8h+1$, $p'_k = 8h+3$, so bilden wir gemäss 57)

$$\left.\begin{array}{l} A + B\sqrt{-2} = \prod_{k=1}^{\mu} (a_k + b_k \sqrt{-2}) \prod_{k=1}^{\mu} (a'_k + b'_k \sqrt{-2}) \\ \text{und finden} \\ A = \Pi a_k \Pi a'_k - 2\, \Pi a_k \Sigma b'_1 b'_2 a'_3 \ldots a'_\mu - 2\, \Pi a'_k \Sigma b_1 b_2 a_3 \ldots a_\mu + \ldots \end{array}\right\} \quad 62)$$

Leicht erkennt man wiederum alle Zahlen A als modulo 4 congruent und die obige Ueberlegung bei der Summation liefert

$$\Sigma A = \pm \Sigma \left(\frac{-1}{r}\right) r = 2^{\mu+\mu'} \prod_{k=1}^{\mu} a_k \prod_{k=1}^{\mu} a'_k \gtrless 0 \quad (r^2 + 2s^2 = n'). \quad 63)$$

Ist also allgemein $n' = \prod_{k=1}^{\nu} p_k$ eine Zahl ohne mehrfache Factoren, so kann $\Sigma \left(\frac{-1}{r}\right) r \left(\begin{smallmatrix} r^2 + s^2 = n' \\ r^2 + 2s^2 = n' \end{smallmatrix}\right)$ als gleich $\pm 2^\nu \prod_{k=1}^{\nu} a_k$ nie verschwinden, sobald n' überhaupt durch $r^2 + s^2$ resp. $r^2 + 2s^2$ darstellbar ist.

Die allgemeinste darstellbare Zahl n können wir schreiben

$$n = Q^2 \, . \, n' \, . \prod_{i=1}^{\mu} p_i^{2\varrho_i} \, . \prod_{h=1}^{\nu} p_h'^{\,2\sigma_h}, \tag{64}$$

wenn, allgemein zu reden, p_i und p'_h verschiedene darstellbare, Q ein Product nichtdarstellbarer Primzahlen bedeutet. Man erhält alsdann diejenigen Darstellungen $\frac{n}{Q^2} = A^2 + B^2$, in denen A und B keinen gemeinsamen Teiler haben, genau so wie oben, wenn man setzt ($\mathbf{N}$=Norm)

$$\left.\begin{aligned} p_i^{2\varrho+1} &= \mathbf{N}\,(a_i + b_i i)^{2\varrho+1} = \mathbf{N}\,(a_i\, a_i^{(\varrho)} + b_i^{(\varrho)} i) \\ p_h'^{\,2\sigma} &= \mathbf{N}\,(a'_h + b'_h i)^{2\sigma} \;\;\, = \mathbf{N}\,(\;\; a_h'^{(\sigma)} + b_h'^{(\sigma)} i) \text{*)} \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

und die bezügliche Summe der A als $2^{\mu+\nu} \prod_{k=1}^{\mu} a_k \prod_{i=1}^{\mu'} a_i^{(\varrho)} \prod_{h=1}^{\nu} a_h'^{(\sigma)}$. Ausserdem treten analoge Darstellungen auf, deren A und B aus p_i, p'_h zusammengesetzte gemeinsame Factoren enthalten. Man verificirt dann leicht, dass, bei geeigneter Vorzeichenbestimmung der Summanden, die Formel gilt

$$\sum_{(n)} \left(\frac{-1}{r}\right) r = Q \sum_{(n')} \left(\frac{-1}{r}\right) r \, . \prod_{i=1}^{\mu'} \Big(\sum_{\varrho=0}^{\varrho_i} a^{(\varrho)} p_i^{\varrho_i - \varrho}\Big) \, . \prod_{h=1}^{\nu} \Big(\sum_{\sigma=0}^{\sigma_h} 2^\sigma a_h'^{(\sigma)} p_h'^{\,\sigma_h - \sigma}\Big) \, . \tag{66}$$

Keiner der Factoren rechts kann Null werden, denn von $p'^{\sigma} + 2a'^{(1)} p'^{\sigma-1} + \ldots 2^\sigma a'^{(\sigma)}$ ist dies evident, und für $p^\varrho + a^{(1)} p^{\varrho-1} + \ldots + a^{(\varrho)}$ folgt es daraus, dass $a^{(\varrho)}$ nicht durch p teilbar sein kann. Da aber Analoges auch für die auf die Determinante -2 bezogenen Summen gilt, so *verschwindet* $\Sigma \left(\frac{-1}{r}\right) r$ *niemals, wenn* n *durch die zugehörige quadratische Form* $r^2 + s^2$ *oder* $r^2 + 2s^2$ *Darstellungen zulässt.*

---

*) Hier kann auch $\sqrt{-1}$ durch $\sqrt{-2}$ ersetzt werden.

Damit ist aber in der Tat bewiesen, dass die Nicht-Darstellbarkeitsbedingung 55) das adäquate Kriterium der Schnittsystem-Correspondenzen ist.

Da dieses Kriterium von den in n quadratisch enthaltenen Factoren k^2 überhaupt nicht abhängt, so haben *alle* Grade $\frac{n}{k^2} = n' k'^2$ die Eigenschaft, dass ihre reducibelen Correspondenzgruppen gleichzeitig Schnittpunktsysteme sind, sobald dieselbe für n' nachgewiesen ist. Nach den Ausführungen am Schlusse von § 9 bewirkt dies unmittelbar, dass dann *auch die irreducibelen Correspondenzen aller Grade* $\frac{n}{k^2}$ *zugleich Schnittsystem-Correspondenzen* sind. Also erledigt 55) auch die ursprüngliche Fragestellung voll und ganz.

Infolge des Kriteriums ergeben sich gewisse Anforderungen an die *Art der Zusammensetzung der Transformationsgrade n unserer besonderen Classe aus Primfactoren*. Es sei durch die Congruenz

$$n' \equiv 1^a . 3^b . 5^c . 7^d \text{ mod. } 8 \qquad 67)$$

angedeutet, dass n, nach Weglassung aller geraden Potenzen von Factoren, resp. a, b, c, d verschiedene Primfactoren von den bezüglichen Formen $8h + 1, 3, 5, 7$ enthalte. Soll n selbst modulo 8 von bestimmter Form sein, so unterliegen diese Anzahlen gewissen Bedingungen, nämlich den *Congruenzen*

$$\left.\begin{array}{ll} n \equiv 7 \text{ mod. } 8 & b \equiv c \not\equiv d \text{ mod. } 2 \\ n \equiv 5 & d \equiv b \not\equiv c \\ n \equiv 3 & c \equiv d \not\equiv b \\ n \equiv 1 & b \equiv c \equiv d \end{array}\right\} \qquad 68)$$

Ferner ist N teilbar durch $2^{a+2b+c+3d}$, also verlangt II 43)

$$a + 2b + c + 3d > 2. \qquad 69)$$

Anderseits wird aber 55) erst erfüllt, wenn wir neben den Congruenzen 68) die *Ungleichheiten* verlangen

$$\left.\begin{array}{lll} \text{bei } n\equiv 5; & n\equiv 3; & n\equiv 1 \\ b+d>0; & c+d>0; & b+d>0,\ c+d>0. \end{array}\right\} \quad 70)$$

In der Tat sichern aber 68) und 70) die Erfüllung von 69), ja es ist alsdann sogar

$$\text{für } n\equiv 3 \bmod. 8, N\equiv 0 \bmod. 16;\ n\equiv 1 \bmod. 4, N\equiv 0 \bmod. 32. \quad 71)$$

Somit ist das Resultat: *Schnittsystem-Correspondenzen 16. Stufe gehören zu allen solchen Transformationsgraden n, deren Zerlegungen in Primfactoren den Bedingungen 70) genügen.* Dazu, da bei $d>0$ stets jene erfüllt sind, das Corollar: Allen Transformationsgraden n, welche von der Form $8h+7$ sind, oder doch einen nicht quadratisch vorkommenden Primfactor dieser Form besitzen, entsprechen Schnittsystem-Correspondenzen.

Eine parallel laufende Ueberlegung gibt das Resultat von Herrn Hurwitz: *Bei der 8. Stufe hängt die Existenz einer Schnittsystem-Correspondenz an dem Auftreten eines nicht quadratischen Factors $4h+3$ in n.*

IV. Capitel.

Algebraischer Character der Schnittsystem-Correspondenz.

§ 15.

Normalform der Correspondenzgleichung.

Es bleibt noch das rein algebraische Problem, den wesentlichen, formalen Character der Gleichung einer Modularcorrespondenz, welche den Kriterien des vorigen Ca-

pitels genügt, herzuleiten. Einige Betrachtungen über Gleichungen von Schnittsystem-Correspondenzen im allgemeinen müssen dem mehrfach postulirten Beweis der Existenz einer äquidimensionalen Gleichung und gewisser Invarianten-Eigenschaften derselben vorangehen.

Es sei eine biternäre Form gegeben, m. Dimension in den x_i, r. in den y_i

$$f = \sum_{\varrho,\sigma} \sum_{\varrho',\sigma'} a_{\varrho\sigma\tau}^{\varrho'\sigma'\tau'} x_1^{\varrho} x_2^{\sigma} x_3^{\tau} y_1^{\varrho'} y_2^{\sigma'} y_3^{\tau'}, \qquad 1)$$

so dass alle Terme vorkommen können, für die $\varrho + \sigma + \tau = m$, $\varrho' + \sigma' + \tau' = r$. Auf der Grundcurve, deren Gleichung wir in den beiden Formen schreiben wollen

$$F = x_1^8 + x_2^8 + x_3^8 = 0, \quad \Phi = y_1^8 + y_2^8 + y_3^8 = 0, \qquad 2)$$

definirt $f = 0$ mittelst der Correspondenzcurven m. und r. Ordnung (vgl. § 9) eine $(8m, 8r)$-deutige Schnittsystem-Correspondenz. Eine und dieselbe Zuordnung auf der Grundcurve kann aber sehr wol durch verschiedene biternäre Gleichungen derselben Dimensionen $f = 0$, $f' = 0, \ldots$ ausgedrückt sein, welche in der Ebene durchaus verschiedene Gebilde bestimmen. Dies findet offenbar dann und nur dann statt, wenn die Correspondenzcurven gleicher Ordnung, die in $f = 0$, $f' = 0 \ldots$ demselben Punkte der Grundcurve entsprechen, ihre Schnittpunkte mit der Grundcurve zu gemeinsamen Punkten haben, also, wenn die Formen $f, f' \ldots$ vermöge der Gleichungen $F = 0$, $\Phi = 0$ identisch gemacht werden können.

Evident ist, dass *die durch $f = 0$ definirte Correspondenz auch dargestellt wird durch alle Gleichungen der Form*

$$f' = kf + \Sigma G_{\lambda\mu} F^{\lambda} \Phi^{\mu} = 0, \qquad 3)$$

wenn die $G_{\lambda\mu}$ beliebige ganze Functionen der Dimensionen $m - 8\lambda$ in x_i, $r - 8\mu$ in y_i bedeuten. Prägnanter wird das Wesentliche dieser Beziehung der Formen f, f' durch die Congruenz gegeben

$$f' \equiv kf \text{ modd. } F, \Phi. \tag{4}$$

Umgekehrt sind aber auch alle Gleichungen einer gegebenen Schnittsystem-Correspondenz unter den modulis F, Φ congruenten Formen enthalten. Zum Beweise bringe man zuerst jede Form 1) vermöge 2) auf eine eindeutig bestimmte *Normalform*.

Nach einem elementaren Satze der Algebra können wir, wenn wir in jeder Reihe eine Variabele bevorzugen, vermöge 2) offenbar jede Form f in eine solche verwandeln, welche in den bevorzugten Variabelen nur noch bis zum 7. Grade ansteigt. Zeichnen wir x_2, y_2 aus und behalten uns vor, x_3, y_3 jederzeit constant gesetzt zu denken, so erreichen wir, dass

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma a_{\varrho\sigma\tau}^{\varrho'\sigma'\tau'} x_1^\varrho x_2^\sigma x_3^\tau y_1^{\varrho'} y_2^{\sigma'} y_3^{\tau'} \equiv \Sigma b_{\lambda\mu\nu}^{\lambda'\mu'\nu'} x_1^\lambda x_2^\mu x_3^\nu y_1^{\lambda'} y_2^{\mu'} y_3^{\nu'} \text{ modd. } F, \Phi, \\ \text{wo} \quad \lambda + \mu + \nu = m, \ \lambda' + \mu' + \nu' = r, \ \mu < 8, \ \mu' < 8. \end{array}\right\} \tag{5}$$

Denn wir brauchen nur ($\sigma > 8$) die einfach-ternäre Identität

$$x_1^\varrho x_2^\sigma x_3^\tau = -x_1^{\varrho+8} x_2^{\sigma-8} x_3^\tau - x_1^\varrho x_2^{\sigma-8} x_3^{\tau+8} + x_1^\varrho x_2^{\sigma-8} x_3^\tau . F \tag{6}$$

wiederholt auf beide Reihen der Terme von f als Recursionsformel anzuwenden, um eine *Identität* zu finden der Form

$$f = g + \Sigma G_{\lambda\mu} F^\lambda \Phi^\mu, \tag{7}$$

wo g in x_2 und in y_2 höchstens vom 7. Grade ist.

Diese Form g soll als Normalform von f bezeichnet werden. Sie ist zu f eindeutig bestimmt, wenn stets nach x_2, y_2 reducirt werden soll. Aus der Definition der Irre-

ducibilität folgt, dass in g alle Producte $x_1^\lambda x_2^\mu x_3^\nu$, in denen $\mu < 8$, als linear unabhängige Veränderliche zu betrachten sind. Denn, angenommen, es bestehe für alle x_1 eine Relation

$$\sum_\lambda \sum_{\mu=0}^{7} c_{\lambda\mu\nu} x_1^\lambda x_2^\mu x_3^\nu = 0 \qquad 8)$$

und unter x_2 werde die durch $F = 0$ definirte algebraische Function von x_1 verstanden, so muss identisch

$$\sum_\lambda c_{\lambda\mu\nu} x_1^\lambda x_3^\nu = 0, \quad \therefore c_{\lambda\mu\nu} = 0 \text{ sein.} \qquad 9)$$

Selbstverständlich sind dann auch die sämmtlichen Terme von g linear unabhängig. Daher können zu einer Form f nicht mehrere Normalformen gehören, die nicht im gewöhnlichen Sinn identisch wären.

Somit stellen auch zwei biternäre Formen f, f' der Dimensionen (m, r), gleich Null gesetzt, dann und nur dann auf der Grundcurve dieselbe $(8m, 8r)$-deutige Correspondenz dar, wenn ihre Normalformen g, g' bis auf einen constanten Factor übereinstimmen, d. h. wenn die Identität besteht

$$g = kg', \qquad 10)$$

oder sich Functionen $G_{\lambda\mu}$, $G'_{\lambda\mu}$ so finden lassen, dass identisch

$$f - \Sigma G_{\lambda\mu} F^\lambda \Phi^\mu = k\{f' - \Sigma G'_{\lambda\mu} F^\lambda \Phi^\mu\}. \qquad 11)$$

Damit ist aber die Umkehrung p. 68 bewiesen.

Als Corollar bemerke man: Die Gleichung einer $(8m, 8r)$-deutigen Schnittsystem-Correspondenz auf der Grundcurve ist, wenn $m < 8$, $r < 8$, eindeutig bestimmt.

Hinwiederum ist es einleuchtend, dass der Beweisgang in Kraft bleibt, wenn wir zwei beliebige irreducibele Grundformen F und Φ annehmen. Damit kommen wir zu einem

allgemeineren Satz über biternäre Formen, welcher, allgemein zu reden, das Analogon ist zu einem Specialfall des *Kronecker-Nöther'schen Fundamentalsatzes der ternären Algebra*, des Inhaltes: Alle Curven m. Ordnung $f=0, f'=0, \dots$, welche durch die Schnittpunkte einer solchen $f=0$ mit einer Grundcurve s. Ordnung $F=0$ gehen, sind, vorausgesetzt dass jene Schnittpunkte keine vielfachen Punkte sind, in der Gleichungsform enthalten

$$f' = kf + GF = 0, \qquad 12)$$

wo G eine ganze Function $m-s$. Dimension ist.

§ 16.

Die äquidimensionale Gleichung der Correspondenz.

Für eine $(8m, 8m)$-deutige Modularcorrespondenz seien die Schnittsystem-Kriterien des § 14 erfüllt. Dann existirt nach § 9 eine Gleichung $f=0$, welche ein System von Correspondenzcurven m. Ordnung darstellt, die von Parametern x_i algebraisch abhängen. Da zu jedem $x_1:x_2:x_3$ nur eine Gruppe von Punkten (y) gehört, bildet man sofort eine Gleichung, welche die Parameter rational enthält. Ebenso existirt eine Gleichung m. Dimension in x_i und rational in y_i. Beide Gleichungen zusammen reichen sicher zur vollständigen Definition der Correspondenz aus, sofern man aus der ersten zu den x_i die y_i, aus der zweiten zu den y_i die x_i bestimmt. Daher können wir auch von einem gemeinsamen Nenner absehen und die *Definitionsgleichungen* schreiben

$$\overset{m}{f}(x_1, x_2, x_3; \overset{r}{y_1, y_2, y_3}) = 0, \quad \overset{r'}{f'}(x_1, x_2, x_3; \overset{m'}{y_1, y_2, y_3}) = 0, \qquad 13)$$

wo f, f' ganze Functionen der beigesetzten Dimensionen seien.

Nun werde die Form f, unter der Voraussetzung $x_3^8 = y_3^8 = -1$, auf die Normalform g des vorigen Paragraphen gebracht und damit allen linearen Abhängigkeiten der Variabelen vermöge $F = 0$, $\Phi = 0$ Rechnung getragen. Zugleich mit $f = 0$ bestehen auch alle Gleichungen, welche aus ihr dadurch entspringen, dass man die Variabelen den simultanen Substitutionen der Gruppe Γ unterwirft, da $f = 0$ eine Identität in ω ist. Führen wir insbesondere *die 64 simultanen ε-Multiplicationen* (II 36) aus, so haben alle resultirenden Formen $f_1, f_2, \ldots f_{64}$ die Normalform. Bilden wir das *Product* derselben

$$\prod_{i=1}^{64} f_i(x_1, x_2; y_1, y_2) = \prod_{\lambda=0}^{7} \prod_{\mu=0}^{7} f(\varepsilon^{\lambda} x_1, \varepsilon^{\mu} x_2; \varepsilon^{n\lambda} y_1, \varepsilon^{n\mu} y_2), \qquad 14)$$

so ist dasselbe eine ganze Function $8m$. Grades in $x_1^8 = \varkappa^2$, $8r$. Grades in $y_1^8 = \lambda^2$. Denn das innere Product für ein festes λ ist, als symmetrische Function der conjugirten Werte der ganzen, algebraischen Functionen x_2, y_2 von x_1, y_1, eine ganze Function von x_1^8, y_1^8; auf die Glieder mit $\varepsilon^{\lambda} x_1$, $\varepsilon^{\mu\lambda} y_1$, welche sie ausserdem enthält, bezieht sich ebenso das äussere Product.

Nun ist *die gewöhnliche Modulargleichung zwischen* $\varkappa^2$, λ^2

$$M(\varkappa^2, \lambda^2) = 0 \qquad 15)$$

bekanntlich irreducibel und sowol in $\varkappa^2$ als in λ^2 vom Grade $N = 8m$. Die Gleichung $\prod f_i = 0$ hat aber, nach der Definition der Modularcorrespondenz $f = 0$, für jedes $\lambda^2 = y_1^8$ $8m$ Wurzeln $\varkappa^2 = x_1^8$ mit der Modulargleichung $M = 0$ gemein. *Daher ist* $r \geqq m$, *und das Product* $\prod f_i$, *als vom* $8r$. *Grade in* λ^2, *kann nur gleich* M *sein, multiplicirt mit einem nur von* λ^2 *abhängigen rationalen Factor* $8(r-m)$. *Grades*

$$\prod_{i=1}^{64} f_i = R(\lambda^2)\, M(\varkappa^2, \lambda^2)\,. \qquad 16)$$

Nun verschwindet aber R für $8(r-m)$ Werte von $\lambda^2 = y_1^8$, sagen wir für $y_1 = y_1^{(i)}$, unabhängig von x_1^8. Also muss auch ein Factor f_i für ein $y_1^{(i)}$ und ein zugehöriges $y_2^{(i,k)}$ unabhängig von x_1, x_2 verschwinden. Entsprechendes gilt infolge der Gleichberechtigung der Factoren für jedes f_i, so dass jedes für $r-m$ Werte $y_1^{(i)}$ unabhängig von x_1, x_2 zu Null werden muss. Soll aber eine Normalform dergestalt verschwinden, so müssen nach 9) die Coefficienten aller Potenzen $x_1^{\lambda} x_2^{\mu}$, d. h. gewisse Functionen $\psi_{\lambda\mu}$ r. Dimension der y_i gleichzeitig für $y_1^{(i)}, y_2^{(i,k)}$ verschwinden. Nun haben diese Gleichungen $\psi_{\lambda\mu} = 0$ für einen Wert $y_1^{(i)}$ ein gemeinsames Wurzelpaar $y_1^{(i)}, y_2^{(i,k)}$, also haben sie alle zu jenem $y_1^{(i)}$ gehörigen Wurzeln der irreducibelen Gleichung $\Phi=0$ gemeinsam. Somit haben die durch $\psi_{\lambda\mu} = 0$ dargestellten Curven r. Ordnung $(r-m)$mal 8 Punkte je in gerader Linie unter einander und mit der Grundcurve gemein. Daher können die sämmtlichen Schnittpunkte von $\psi_{\lambda\mu}=0$ mit $\Phi = 0$ durch $r-m$ Gerade $\chi_i = 0$ und eine Curve m. Ordnung $\varphi_{\lambda\mu} = 0$ ausgeschnitten werden, und zwar bilden wir die Gleichung der so zerfallenden Curve r. Ordnung nach dem Fundamentalsatz p. 70 in der Form

$$\psi'_{\lambda\mu} = \varphi_{\lambda\mu} \cdot \prod_{i=1}^{r-m} \chi_i = k\,\psi_{\lambda\mu} + G\,\Phi. \tag{17}$$

Zerfallen also die $\psi_{\lambda\mu}$ nicht schon selbst in dieser Weise, so führen wir durch 17) die zerfallenden $\psi'_{\lambda\mu}$ ein, ohne [nach 3)] die Correspondenz selbst zu ändern. An Stelle von $f_i = 0$ kann so immer eine Gleichung $f_i^{(0)} = 0$ gebildet werden, welche sich entsprechend 16) in einen unwesentlichen, von x_i unabhängigen Factor $r-m$. Grades $\Pi\chi_i$, und einen wesentlichen irreducibelen Factor spaltet, der sowol in x_i als in y_i von der m. Dimension ist, und also, gleich

Null gesetzt, die $(8m, 8m)$-deutige Correspondenz schon für sich völlig definirt.

Demnach ist eine modulare Schnittsystem-Correspondenz stets durch eine einzige äquidimensionale Gleichung zwischen x_i, y_i *rein definirbar.*

Zu den Transformationsgraden der besonderen Classe 16. Stufe des § 14 und nur zu diesen gehören Modulargleichungen $M(\varkappa^2, \lambda^2) = 0$, *deren linke Seiten sich in 64 Factoren* $f(\sqrt[4]{\varkappa}, \sqrt[4]{\varkappa'}; \sqrt[4]{\lambda}, \sqrt[4]{\lambda'})$ *des Grades* $\frac{N}{8}$, *resp. gemäss dem Schlusssatz über die 8. Stufe, in 16 Factoren* $f(\sqrt{\varkappa}, \sqrt{\varkappa'}; \sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda'})$ *des Grades* $\frac{N}{4}$ *spalten lassen.*

Ausser der so umgrenzten, ausgezeichneten Classe gibt es keine anderen irrationalen Modulargleichungen der gewöhnlichen Modulsysteme $\sqrt[4]{\varkappa}, \sqrt[4]{\varkappa'}$ *und* $\sqrt{\varkappa}, \sqrt{\varkappa'}$, *welche, nur im Verein mit* $\varkappa^2 + \varkappa'^2 = 1$, *die eigentlichen Modulargleichungen völlig zu ersetzen im stande wären.* Jede nicht zur Classe gehörige irrationale Modulargleichung derselben Moduln stellt die einander durch die Transformation zugeordneten Modulpaare nur zugleich mit Wurzelpaaren dar, die dem Problem fremd sind.

§ 17.

Invarianz der Correspondenzgleichung.

Die allgemeine, biternäre, äquidimensionale Form m. Ordnung enthält $\left(\frac{m+1 \cdot m+2}{2}\right)^2$ Terme. Handelt es sich also um Aufstellung der Gleichung der Schnittsystem-Correspondenz m. Ordnung, so drängt die sehr rasch wachsende Gliederzahl die Frage auf, ob und wie dieselbe durch die Erkenntnis reducirt werden kann, dass gewisse Glieder

von vornherein gar nicht oder nur in bestimmten Verbindungen auftreten.

Im doppelt-binären Gebiet, welchem die gewöhnlichen Modulargleichungen zwischen $\varkappa^2$, λ^2 angehören, ist diese Fragestellung von bekanntem Nutzen. *Ueberhaupt kann bei dem Transformationsproblem eines Hauptmoduls* $M=\frac{x_1}{x_2}$, $\overline{M}=\frac{y_1}{y_2}$ *unmittelbar die Invarianz der Gleichung bei den simultanen Substitutionen der Variabelenpaare* $x_1, x_2; y_1, y_2$ *postulirt werden*, weil die Variabelen unabhängig sind. Sicher ist daher die lineare Invariantentheorie bei der Bildung jener Gleichungen mit Vorteil anzuwenden.*)

Aehnliche Eigenschaften werden nun auch den Gleichungen der Modularcorrespondenzen zukommen, wie Herr Klein in der mehrfach citirten Programmnote bemerkt. Indessen kann keineswegs von vornherein angenommen werden, dass diese biternären Gleichungen bei den simultanen Substitutionen der Correspondenzen in sich im Sinne der ternären Invariantentheorie ungeändert bleiben, da die Moduln eines vollen Systems eben nicht unabhängig variabel sind. Zunächst ist nur einleuchtend (p. 71), dass, wenn $f=0$ die Definitionsgleichung ist, auch

$$f(S(x_1, x_2, x_3), \overline{S}(y_1, y_2, y_3))=0 \qquad 18)$$

mit $f=0$ auf der Grundcurve, d. h. *vermöge* $F=0$, $\Phi=0$ *tatsächlich*, wenn auch nicht notwendig formal, übereinstimmt. Dagegen bleibt zu untersuchen, *ob die Form f so gewählt werden kann, dass sie bei den Substitutionen der Correspondenz in sich bis auf constante Factoren formal, d. h. auch im Gebiete unabhängiger Variabelen x_i, y_i, unveränderlich ist.*

*) Vgl. Ber. d. sächs. Ges. d. W. 1885, p. 79, II. Teil der cit. Note.

Die biternäre Form f soll eine Simultaninvariante der Correspondenz heissen, wenn sie sich bei den erzeugenden simultanen Substitutionen II 36) der Gruppe Γ und beim Reihenwechsel II 37) nur um einen constanten Factor ändert. Dieser Factor wird sich infolge der Periodicität der Substitutionen zudem als Eins erweisen.

Der Beweis, dass die Correspondenzgleichung in der Tat stets formal invariant gewählt werden kann, zerfällt, je nachdem $m < 8$ oder $m \geqq 8$, in zwei Teile. *Jede Modularcorrespondenz $f = 0$ einer Ordnung $m < 8$ muss durch das Verschwinden einer Simultaninvariante dargestellt sein.* Denn geht f durch eine lineare Substitution in f' über, so hat sowol f als f' schon die Normalform, also stellen $f = 0$, $f' = 0$ nach 10) nur dann dieselbe Correspondenz dar, wenn f, f' bis auf einen constanten Factor identisch sind (vgl. das Corollar p. 69).

Ist aber $m \geqq 8$, so kann die Correspondenzgleichung stets durch eine verschwindende Simultaninvariante ersetzt werden (vgl. § 15). Sei nämlich die gegebene Form f nach 7) auf die Normalform g gebracht. Durch Anwendung einer iterirten periodischen Substitution S, S^2, ... mögen die Functionen f, g, $G_{\lambda\mu}$, $H_{\lambda\mu}$ successive übergehen in f_1, g_1, $G_{\lambda\mu}^{(1)}$, $H_{\lambda\mu}^{(1)}$; f_2, g_2, $G_{\lambda\mu}^{(2)}$, $H_{\lambda\mu}^{(2)}$; ... Hier ist aber z. B. g_1 die Normalform von f_1 in Bezug auf $S(x_2)$, $\bar{S}(y_2)$, also im allgemeinen verschieden von der Normalform g' von f_1 in Bezug auf x_2, y_2, und zwar hat die Differenz die Form

$$g_1 - g' = \Sigma H_{\lambda\mu} F^\lambda \Phi^\mu, \tag{19}$$

so dass

$$f_1 = g' + \Sigma(G_{\lambda\mu}^{(1)} + H_{\lambda\mu}) F^\lambda \Phi^\mu. \tag{20}$$

Sollen nun $f = 0$, $f_1 = 0, \ldots$ dieselbe Correspondenz darstellen, so müssen nach 11) die Identitäten bestehen

$$\left.\begin{aligned} f\ \ -\Sigma G_{\lambda\mu}\ F^\lambda \Phi^\mu &= k\left\{f_1 - \Sigma(G^{(1)}_{\lambda\mu} + H_{\lambda\mu})F^\lambda \Phi^\mu\right\} \\ f_1\ -\Sigma G^{(1)}_{\lambda\mu}\ F^\lambda \Phi^\mu &= k\left\{f_2 - \Sigma(G^{(2)}_{\lambda\mu} + H^{(1)}_{\lambda\mu})F^\lambda \Phi^\mu\right\} \\ &\text{u. s. w. bis zu} \\ f_{h-1} - \Sigma G^{(h-1)}_{\lambda\mu} F^\lambda \Phi^\mu &= k\left\{f - \Sigma(G^{(h)}_{\lambda\mu} + H^{(h-1)}_{\lambda\mu})F^\lambda \Phi^\mu\right\}, \end{aligned}\right\} \quad 21)$$

wenn h die Periode der Substitution S war. Weiter folgt aber aus 19) leicht das Bestehen der Identität

$$\Sigma(H_{\lambda\mu} + H^{(1)}_{\lambda\mu} + \ldots + H^{(h-1)}_{\lambda\mu})\, F^\lambda \Phi^\mu = 0, \qquad 22)$$

und aus der Combination derselben mit 21) fliesst $k=1$.

War nun f bei der Substitution der Periode h nicht formal invariant, so können wir eine Form, die diese Invarianteneigenschaft gegenüber S besitzt, bilden als

$$f' = f - \Sigma\left\{G_{\lambda\mu} - \frac{1}{h}(H^{(1)}_{\lambda\mu} + 2H^{(2)}_{\lambda\mu} + \ldots + (h-1)H^{(h-1)}_{\lambda\mu})\right\}F^\lambda \Phi^\mu, \quad 23)$$

denn man überzeugt sich nach 21) sofort, dass wegen 22) $f' = f_1 = \ldots = f_{h-1}$. Nun kommen aber nur S^2, T, U, P von den bezüglichen Perioden 8, 2, 3, 4 in Betracht. Somit werden wir successive aus f eine Form f' bilden, welche bei T, aus f' eine f'', welche auch bei U, aus f'' eine f''', die ausserdem noch bei S^2 invariant ist; endlich stellt man auf übereinstimmende Weise auch Invarianz her beim Reihenwechsel P, welcher die Periode 2 oder 4 hat, je nachdem $\left(\frac{2}{n}\right) = \pm 1$.

Somit ist die Correspondenz stets durch das Nullsetzen einer Simultaninvariante zu definiren, nur ist diese letztere nicht etwa eindeutig bestimmt.

Damit ist die wirkliche Bildung der Gleichungen als die Bildung von Simultaninvarianten der ternären Invariantentheorie erschlossen. Nun wollen wir aber Formen

bilden, welche bei Substitutionen einer endlichen Gruppe formal ungeändert bleiben, wenn die Variabelen jeder Reihe gleichzeitig bestimmten verschiedenen Substitutionen unterworfen werden; die gewöhnliche Invariantentheorie dagegen sucht *covariante* Formen, deren Beziehungen zu gegebenen Formen unveränderlich sind, wenn die Variabelen aller Reihen cogredient oder contragredient sind (p. 39), aber beliebig linear substitutirt werden. *Wie schon die obige Definition der Simultaninvariante von dem allgemeinen Covariantenbegriff wesentlich verschieden* ist, so ist überhaupt der Character der obigen beiden Aufgaben ein principiell verschiedener. Ob die Uebereinstimmung der Gebiete der beiden Invarianten-Definitionen über einige evidente Fälle hinausgeht, bleibt deshalb von Fall zu Fall besonders zu untersuchen. Bei dem einfachen Character der Gruppe Γ ist es daher angezeigt, für den algebraischen Aufbau nicht der Invariantentheorie analoge Processe nachzubilden, sondern ein speciell angepasstes, directes Verfahren zu suchen.

§ 18.

Die Simultaninvarianten der Correspondenz.

Wir bilden direct die allgemeinste biternäre Form f, welche bei Transposition, Verschiebung, ε-Multiplication und Reihenwechsel bis auf einen numerischen Factor formal invariant ist. Dieselbe ist wegen der Invarianz bei P [II 37)] äquidimensional, sagen wir m. Ordnung. Sei

	x_1	x_2	x_3		y_1	y_2	y_3
-1	x_2	x_1	x_2	-1	y_2	y_1	y_3
$+1$	x_2	x_3	x_1	$+1$	y_2	y_3	y_1
-1	$\varepsilon^2 x_1$	εx_2	εx_3	-1	$\varepsilon^{2n} y_1$	$\varepsilon^n y_2$	$\varepsilon^n y_3$
σ^{-1}	y_1	$\left(\frac{2}{n}\right) y_2$	$\varepsilon^{-\frac{n-1}{2}} y_3$	σ	$\left(\frac{2}{n}\right) x_1$	x_2	$\varepsilon^{\frac{n-1}{2}} x_3$,

24)

eine tabellarische Zusammenstellung obiger Operationen, wobei gewisse gemeinsame Factoren abgesondert sind, die in f nur den Factor 1 ergeben.

Ist nun ein beliebiger Term der Form f

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{t}_{\alpha\beta\gamma}^{\alpha'\beta'\gamma'} = x_1^{\alpha} x_2^{\beta} x_3^{\gamma}\; y_1^{\alpha} y_2^{\beta} y_3^{\gamma}, \\ \text{wo } \alpha+\beta+\gamma=\alpha'+\beta'+\gamma'=m \text{ (wie im folgenden stets),} \end{array}\right\} \quad 25)$$

so muss f auch die sämmtlichen Terme enthalten, welche bei 24) aus $\mathrm{t}_{\alpha\beta\gamma}^{\alpha'\beta'\gamma'}$ entstehen. Nun entspringen 6 Terme aus den Vertauschungen T und Verschiebungen U der Variabelenpaare x_i, y_i, 6 weitere durch den Reihenwechsel P, aber keine neuen durch S^2. *Also ist f ein lineares Aggregat von zwölfgliedrigen Summen, dessen Coefficienten durch die Substitutionen nicht bestimmbar sind.* Wir betrachten daher ferner nur noch solche Summen, deren 12 Terme offenbar einen gemeinsamen Typus haben und die daher *typische Invarianten* heissen mögen.

Sie lauten allgemein

$$\mathsf{I} = \Sigma a_{\alpha\beta\gamma}\, \mathrm{t}_{\alpha\beta\gamma}^{\alpha'\beta'\gamma'} + \Sigma a'_{\alpha\beta\gamma}\, \mathrm{t}_{\alpha'\beta'\gamma'}^{\alpha\beta\gamma}, \qquad 26)$$

summirt über alle Permutationen der Exponentenpaare α, α'; β, β'; γ, γ'. Führt man T und U aus, so bedingen $\mathsf{T}^2 = 1$, $\mathsf{U}^3 = 1$ die Coefficientenrelationen

$$\begin{array}{l} a_{\alpha\beta\gamma}^2 = a_{\beta\alpha\gamma}^2,\; a_{\alpha\beta\gamma} = a_{\beta\gamma\alpha} = a_{\gamma\alpha\beta} \\ a'^2_{\alpha\beta\gamma} = a'^2_{\beta\alpha\gamma},\; a'_{\alpha\beta\gamma} = a'_{\beta\gamma\alpha} = a'_{\gamma\alpha\beta}. \end{array} \qquad 27)$$

Nun möge das Zeichen $\mathsf{C}_{\alpha\beta\gamma}^{\alpha'\beta'\gamma'}$ eingeführt werden für die *cyclische Summe*

$$\mathsf{C}_{\alpha\beta\gamma}^{\alpha'\beta'\gamma'} = \mathsf{C}\,\mathrm{t}_{\alpha\beta\gamma}^{\alpha'\beta'\gamma'}, \qquad 28)$$

in der nur über die cyclischen Verschiebungen der Ex-

ponentenpaare summirt wird. Alsdann sind nach 27) nur die Ausdrücke möglich

$$\mathsf{I} = \Sigma_{\alpha\beta\gamma}^{\alpha'\beta'\gamma'} + a\,\Sigma_{\alpha'\beta'\gamma'}^{\alpha\beta\gamma}, \quad \text{oder} \quad \mathsf{I} = \mathsf{A}_{\alpha\beta\gamma}^{\alpha'\beta'\gamma'} + a\,\mathsf{A}_{\alpha'\beta'\gamma'}^{\alpha\beta\gamma}, \qquad 29)$$

wenn

$$\Sigma_{\alpha\beta\gamma}^{\alpha'\beta'\gamma'} = \mathsf{C}_{\alpha\beta\gamma}^{\alpha'\beta'\gamma'} + \mathsf{C}_{\alpha'\beta'\gamma'}^{\alpha\beta\gamma}, \quad \mathsf{A}_{\alpha\beta\gamma}^{\alpha'\beta'\gamma'} = \mathsf{C}_{\alpha\beta\gamma}^{\alpha'\beta'\gamma'} - \mathsf{C}_{\alpha'\beta'\gamma'}^{\alpha\beta\gamma}, \qquad 30)$$

und a der, noch allein zu bestimmende, numerische Coefficient ist.

Weil ferner bei S^2 alle Terme sich mit derselben Einheitswurzel multipliciren müssen, so unterliegen die Exponenten neben 25) den Congruenzen

$$\left.\begin{aligned} \alpha+n\alpha' \equiv \beta+n\beta' \equiv \gamma+n\gamma' \equiv \alpha'+n\alpha \equiv \beta'+n\beta \equiv \gamma'+n\gamma \equiv \\ \equiv 3m\,(n+1) \bmod. 8 \end{aligned}\right\} \qquad 31)$$

oder

$$(n-1)(\alpha-\alpha') \equiv 0, \ldots;\ \alpha-\beta+n(\alpha'-\beta') \equiv 0, \ldots \bmod. 8. \qquad 32)$$

Dann ändert sich aber I bei S^2 überhaupt nicht, d. h. es tritt der Factor 1 vor. Endlich verlangt der Reihenwechsel

$$a'^2 = \left(\left(\frac{2}{n}\right)\varepsilon^{n-1}\right)^{\gamma-\gamma'} = 1. \qquad 33)$$

Demnach haben wir vier Arten typischer Invarianten zu unterscheiden:

*vollkommene**) *oder symmetrische Invarianten* $\Sigma_{\alpha\beta\gamma}+\Sigma_{\alpha'\beta'\gamma'}$, welche sich bei den Substitutionen 24) gar nicht ändern;

alternirende Invarianten $\mathsf{A}_{\alpha\beta\gamma}+\mathsf{A}_{\alpha'\beta'\gamma'}$,

welche nur bei der Transposition einen Zeichenwechsel erleiden;

wechselnde $\genfrac{}{}{0pt}{}{\textit{vollkommene}}{\textit{alternirende}}$ *Invarianten* $\genfrac{}{}{0pt}{}{\Sigma_{\alpha\beta\gamma}-\Sigma_{\alpha'\beta'\gamma'}}{\mathsf{A}_{\alpha\beta\gamma}-\mathsf{A}_{\alpha'\beta'\gamma'}}$

welche ihr Vorzeichen noch beim Reihenwechsel ändern.

---

*) Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder p. 198.

Die allgemeine Form f kann sich nur aus typischen Invarianten derselben Art zusammensetzen. Ist die Art bestimmt, so kennzeichnet jedes Lösungssystem der Congruenzen 31) eine typische Invariante; zu jedem m gibt es eine endliche Anzahl derselben.

Nun unterliegen aber ausserdem unsere Gleichungen $f = 0$ noch gewissen besonderen Bedingungen.

Zur Darstellung der modularen Schnittsystem-Correspondenzen kommen nur vollkommene Simultaninvarianten als Formen f in Betracht, so dass die folgenden Paragraphen es nur mit solchen zu tun haben werden. Denn erwägen wir die beiden Möglichkeiten.

Erstens kann keine *wechselnde* Invariante eine irreducibele Correspondenz darstellen, denn dieselbe verschwindet offenbar für $x_i = y_i$; also müsste jede Correspondenzcurve durch ihren Pol hindurch gehen, im Widerspruch mit p. 41.

Zweitens kann f nicht *alternirend* sein, denn eine Anwendung von **T** und **P** nach einander ergibt

$$f(x_2, x_1, x_3;\, y_2, y_1, y_3) = -f\left(y_1, \left(\frac{2}{n}\right) y_2, \varepsilon^{-\frac{n-1}{2}} y_3;\, \left(\frac{2}{n}\right) x_1, x_2, \varepsilon^{\frac{n-1}{2}} x_3\right), \quad 34)$$

so dass $f = 0$ für $y_1 = -\sigma x_2,\ y_2 = -\sigma \left(\frac{2}{n}\right) x_1,\ y_3 = -\sigma \varepsilon^{\frac{n-1}{2}} x_3$.

Danach müsste also $f_y = 0$ stets durch den angegebenen, zu (x) homologen Punkt (y) gehen. Von den Parametern von (y), als Repräsentanten einer reinen Transformation n. Grades, kann aber nicht allgemein einer mit ω äquivalent sein, wie 34) voraussetzen würde.

Dazu kommt endlich die Bemerkung, dass nach den Resultaten III 71) Schnittsysteme für $n \equiv 3$ mod. 8 nur durch Curven gerader, für $n \equiv 1$ mod. 4 durch Curven von

durch 4 teilbarer Ordnung ausgedrückt werden. *Demgemäss ist für unsere invarianten Correspondenzgleichungen:*

$$m\,(n+1) \equiv 0 \text{ mod. } 8, \qquad 35)$$

oder an Stelle von 31) treten die specielleren Congruenzbedingungen

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + n\alpha' \equiv \beta + n\beta' \equiv \gamma + n\gamma' \equiv 0 \\ \alpha' + n\alpha \equiv \beta' + n\beta \equiv \gamma' + n\gamma \equiv 0 \end{array}\right\} \text{mod. } 8. \qquad 36)$$

§ 19.

Reductionsprincipien für die Invarianten.

Unter den vollkommenen typischen Simultaninvarianten gibt es zunächst solche, welche eigentlich nur *einfachternär* sind, insofern sie die Variabelen beider Reihen nur in gewissen Verbindungen enthalten. Setzen wir weiterhin

$$x_i y_k = z_{ik} \qquad 37)$$

so sind in dieser Hinsicht insbesondere *die ternären Formen der Variabelen* z_{11}, z_{22}, z_{33} ausgezeichnet, in denen also $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$. In solchen, nur noch sechsgliedrigen, typischen Invarianten unterliegen die Exponenten den Congruenzbedingungen

$$(n+1)\,\alpha \equiv (n+1)\,\beta \equiv (n+1)\,\gamma \equiv 0 \text{ mod. } 8. \qquad 38)$$

Diese sind aber im *I. Hauptfall* $n \equiv 7$ mod. 8 identisch erfüllt, verlangen im *II. Hauptfall* $n \equiv 3$ mod. 8 α, β, γ gerade, und endlich im *III. Hauptfall* $n \equiv 1$ mod. 4 α, β, γ durch 4 teilbar, sodass gegenüber den Variabelen z_{ii} von I unter II eigentlich z_{ii}^2, unter III z_{ii}^4 als Variabele zu nehmen sind.

Diese einfachternären Invarianten sind lediglich die gewöhnlichen symmetrischen Functionen dreier Variabelen, somit ganze ganzzahlige Functionen von drei elementaren

symmetrischen Formen, oder von drei Elementarinvarianten, nämlich in den 3 Hauptfällen von

$$\left.\begin{array}{l} I.\ n \equiv 7 \bmod. 8 \quad Z_1 = z_{11} + z_{22} + z_{33}, \\ Z_2 = z_{11} z_{22} + z_{22} z_{33} + z_{33} z_{11}, \quad Z_3 = z_{11} z_{22} z_{33}; \end{array}\right\} \quad 39)$$

$$\left.\begin{array}{l} II.\ n \equiv 3 \bmod. 8 \quad Z_1' = z_{11}^2 + z_{22}^2 + z_{33}^2, \\ Z_2' = z_{11}^2 z_{22}^2 + z_{22}^2 z_{33}^2 + z_{33}^2 z_{11}^2, \quad Z_3' = z_{11}^2 z_{22}^2 z_{33}^2; \end{array}\right\} \quad 40)$$

$$\left.\begin{array}{l} III.\ n \equiv 1 \bmod. 4 \quad Z_1'' = z_{11}^4 + z_{22}^4 + z_{33}^4, \\ Z_2'' = z_{11}^4 z_{22}^4 + z_{22}^4 z_{33}^4 + z_{33}^4 z_{11}^4, \quad Z_3'' = z_{11}^4 z_{22}^4 z_{33}^4. \end{array}\right\} \quad 41)$$

Hieran knüpft sich unmittelbar ein *Reductionsprincip* für alle Formen der Variabelen z_{ii} (resp. z_{ii}^2, z_{ii}^4). Denn nach einem bekannten algebraischen Satz lässt sich jede ganze homogene Function dreier Variabelen auf eine sechsgliedrige specielle Function derselben reduciren, deren Terme eine Variabele gar nicht, eine zweite nicht oder nur in erster und die dritte höchstens in zweiter Potenz enthalten, deren Coefficienten aber ganze Functionen der elementaren symmetrischen Functionen sind. *Also können wir, wenn wir eine bestimmte Reihenfolge der Variabelen festsetzen, jede Form $f(z_{11}, z_{22}, z_{33})$ eindeutig ersetzen durch ein Aggregat der Terme*

$$z_{22}^{\mu}\, z_{33}^{\nu} \quad (\mu = 0, 1;\ \nu = 0, 1, 2), \qquad 42)$$

multiplicirt in ganze Functionen von Z_1, Z_2, Z_3. Dasselbe gilt im II. und III. Fall, wenn z_{ii} und Z_i ersetzt werden durch z_{ii}^2, Z_i', resp. z_{ii}^4, Z_i''.

Nun ist die allgemeine typische Invariante I durch ihre drei Exponentenpaare characterisirt, deren Grössenverhältnis fest so angenommen werde, dass

$$\alpha - \alpha' = a > 0,\ \beta - \beta' = b > 0,\ \gamma' - \gamma = a + b. \quad 43)$$

Vereinigen wir dann noch je entsprechende Glieder in den

beiden wechsel-symmetrischen Summen $\Sigma_{\alpha\beta\gamma}$, $\Sigma_{\alpha'\beta'\gamma'}$ von p. 79, so können wir, unter Fixirung eines bestimmten Anfangsgliedes, schreiben

$$I = \Sigma z_{11}^{\alpha'} z_{22}^{\beta'} z_{33}^{\gamma} (z_{13}^a z_{23}^b + z_{31}^a z_{32}^b). \tag{44}$$

In jedem Term werden wir einen ersten, *ternären Factor* und einen zweiten, *Klammerfactor* unterscheiden, und jeden derselben für sich allein reduciren.

Zuerst wenden wir ein aus den Umformungen mittelst der Gleichungen $F = 0$, $\Phi = 0$ entspringendes Reductionsprincip auf den Klammerfactor an. Multipliciren wir denselben mit der symmetrischen Invariante

$$\zeta = z_{11}^8 + z_{22}^8 + z_{33}^8$$

in den vermöge 2) gleichbedeutenden Formen

$$\zeta = 2z_{11}^8 - (z_{23}^8 + z_{32}^8) = 2z_{22}^8 - (z_{13}^8 + z_{31}^8), \tag{45}$$

so erhalten wir, *solange* $a, b \geqq 16$, *die Recursionsformeln*

$$\left.\begin{aligned}(z_{13}^a z_{23}^b + z_{31}^a z_{32}^b) &= (2z_{11}^8 - \zeta)(z_{13}^a z_{23}^{b-8} + \dots) - z_{22}^8 z_{33}^8 (z_{13}^a z_{23}^{b-16} + \dots) \\ &= (2z_{22}^8 - \zeta)(z_{13}^{a-8} z_{23}^b + \dots) - z_{11}^8 z_{33}^8 (z_{13}^{a-16} z_{23}^b + \dots).\end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Es sind dies Identitäten modulis F, Φ, welche an Stelle des gegebenen Klammerfactors zwei andere einführen, in denen die Exponenten a und b durch um Vielfache von 8 kleinere vertreten sind, multiplicirt in gewisse Potenzen von z_{ii}^8. Offenbar genügt es, diese Recursion je an dem Anfangsglied durchzuführen.

Setzen wir noch

$$a = 8\varrho + r,\ b = 8\sigma + s,\ r < 8,\ s < 8, \tag{47}$$

so wird durch wiederholte Anwendung der Formeln 46) die gegebene Klammer schliesslich ersetzt durch ein Aggregat solcher, in welchen r, s die ursprünglichen, ϱ, σ aber

nur die Werte besitzen 1, 1; 1, 0; 0, 1; 0, 0; jede Klammer ist multiplicirt in eine ganze Function der z_{ii}, deren Dimension, der Abnahme von a, b entsprechend, wächst. In analoger Weise sind aber noch Klammerfactoren mit $\varrho, \sigma \overline{\overline{<}} 1$ auf solche mit $\varrho = \sigma = 0$ zurückzuführen. Für $\varrho = \sigma = 1$ geht die Formel 46) weiter über in

$$(z_{13}^{8+r} z_{23}^{8+s} + \dots) = (2 z_{11}^{8} - S)(z_{13}^{8+r} z_{23}^{s} + \dots) - z_{22}^{s} z_{33}^{8} (z_{12}^{8-s} z_{13}^{r+s} + \dots) \quad 48)$$

und für $\varrho = 0, \sigma = 1$. — ganz analog auch für $\varrho = 1, \sigma = 0$, —

$$(z_{23}^{r} z_{33}^{8+s} + \dots) = (2 z_{11}^{8} - S)(z_{13}^{r} z_{23}^{s} + \dots) - z_{22}^{s} z_{33}^{r+s} (z_{21}^{r} z_{23}^{8-r-s} + \dots). \quad 49)$$

vorausgesetzt, dass nicht nur $r, s < 8$, sondern auch $r + s < 8$; für $r + s > 8$ würde statt 49) eine mit 48) ganz analoge Formel eintreten. Es kann aber sogar $r + s < 8$ vorausgesetzt werden, denn, war $r + s > 8$, so führt man durch

$$(z_{13}^{r} z_{23}^{s} + \dots) = - z_{11}^{r} (z_{12}^{8-r} z_{32}^{r+s-8} + \dots) - z_{22}^{s} (z_{21}^{8-s} z_{31}^{r+s-8} + \dots) \quad 50)$$

Exponenten $8-r$, $8-s$, $r+s-8$ gemäss der Voraussetzung ein. Dass die in den drei letzten Formeln eingeführten Klammern einen andern Index auszeichnen als die gegebene, ist bei der Umformung einer symmetrischen Summe irrelevant.

Somit ist **I** gleich einem Aggregat von Invarianten folgender Beschaffenheit: *die Klammerfactoren enthalten statt a, b nur Exponenten r, s, die der Ungleichheit genügen $0 < r < s < r + s < 8$ und nach 47) und ev. 50) aus a, b gebildet sind;* an Stelle des ternären Factors steht je eine ganze Function der z_{ii}, Z_i. Hier sind die Klammerfactoren offenbar durch keinerlei Recursion mehr zu vereinfachen; dagegen tritt nun für den ternären Factor das erste Reductionsprincip in Kraft, nach welchem für denselben nur

die 6 Formen 42) zu berücksichtigen sind, falls man multiplicirende Functionen der Z_i absondert.

Demgemäss stellen sich als *reducirte Formen der typischen Invarianten im I. Hauptfall* dar

$$\Sigma z_{22}^{\mu} z_{33}^{\nu} (z_{13}^{r} z_{23}^{s} + z_{31}^{r} z_{32}^{s}) \quad (\mu \leqq 1;\ \nu \leqq 2;\ 0 < r < s < r+s < 8). \tag{51}$$

Beim *II. Hauptfall* ist zu bedenken, dass im ternären Factor nur die Functionen der z_{ii}^2 nach dem ersten Princip reducirt werden, also noch eventuell z_{11}, z_{22}, z_{33} als Factoren hinzutreten können; daher bleibt

$$\Sigma z_{11}^{\varrho} z_{22}^{2\mu+\sigma} z_{33}^{2\nu+\tau} (z_{13}^{r} z_{23}^{s} + z_{31}^{r} z_{32}^{s}), \tag{52}$$

wo ausser denselben Bedingungen wie in 51) noch $\varrho, \sigma, \tau < 2$. Endlich gilt Analoges im *III. Hauptfall* für die Variabelen z_{ii}^4 und vortretende niedrigere Potenzen von z_{ii}, so dass mit $\varrho, \sigma, \tau < 4$ die reducirten Formen lauten

$$\Sigma z_{11}^{\varrho} z_{22}^{4\mu+\sigma} z_{33}^{4\nu+\tau} (z_{13}^{r} z_{23}^{s} + z_{31}^{r} z_{32}^{s}). \tag{53}$$

Die Zahl der reducirten Formen wird noch dadurch ausserordentlich eingeschränkt, dass die Exponenten $r, s, \varrho, \sigma, \tau$ ausser an die angegebenen Ungleichheiten an die Congruenzen 36) gebunden sind, welche übergehen in

$$r \equiv (n+1)\varrho, \quad s \equiv (n+1)\sigma, \quad r+s \equiv (n+1)\tau \mod. 8. \tag{54}$$

§ 20.

Das volle System der Simultaninvarianten.

Das Ziel dieser invariantentheoretischen Untersuchung ist, das volle System fundamentaler Simultaninvarianten, d. h. derjenigen typischen Invarianten anzugeben, durch welche sich alle übrigen als ganze Functionen mit ganzzahligen

Coefficienten ausdrücken lassen. Nachdem im vorigen Paragraphen eine endliche Anzahl reducirter Formen gefunden worden ist, sind offenbar nur noch die linear unabhängigen aus ihnen herauszugreifen. In dem vorliegenden Problem ist es in der Tat auch zweckmässig, die Untersuchung von vornherein auf das Gebiet der äquidimensionalen Invarianten zu beschränken. Denn, träten Formen verschiedener Dimension in x_i und y_i im vollen System auf, so könnten sie doch nur in solchen Verbindungen in die Correspondenzgleichungen eingehen, in denen die Dimensionen ausgeglichen sind.

Im Besitze des vollen Systems können wir die linke Seite jeder Correspondenzgleichung, also *die allgemeine Simultaninvariante m. Ordnung f ausdrücken als ein lineares Aggregat aller Producte, die aus den Fundamentalinvarianten gebildet werden können unter der Voraussetzung, dass die Ordnungssumme der Factoren gleich m ist.* In der Terminologie der Invariantentheorie heisst ein solches Aggregat f *eine allgemeine Function vom Gewichte m.*

Ist diese Darstellung von f nur in *einer* Weise möglich? Sicher können sich zwei Ausdrücke f und f' derselben Invariante nur in den Coefficienten der Producte constanten Gewichtes unterscheiden. Also kann auch die Differenz $f' - kf$ [vgl. 3] nur dann zugleich mit F, Φ identisch verschwinden, wenn entweder entsprechende Coefficienten in f und f' proportional sind, oder

$$f' - kf = R \tag{55}$$

sich als ganze Function R identisch verschwindender Aggregate schreiben lässt. Das letztere ist nur dann möglich, wenn zwischen den Fundamentalinvarianten *Relationen höheren Grades* bestehen. Solche existiren aber bei 6 Variabelen

notwendig, sobald 6 oder mehr Formen das volle System bilden. *Ist die Zahl der Fundamentalinvarianten nicht* < 6, *so erfordert die Eindeutigkeit der Darstellung (p. 76) weitere Festsetzungen.*

Das volle System der Fundamentalinvarianten kann nach 51) — 54) für die drei Hauptfälle sofort gebildet werden.

I. Für $n \equiv 7$ mod. 8 lauten die Congruenzen 36) einfach

$$\alpha \equiv \alpha', \quad \beta \equiv \beta', \quad \gamma \equiv \gamma' \text{ mod. } 8. \tag{56}$$

Daher [oder nach 54)] existiren nur reducirte Formen mit $r = s = 0$, d. h. nur symmetrische Formen der z_{ii}, deren fundamentale Formen 39) [vgl. auch 51)] gibt. *Für Transformationsgrade der Form* $n = 8h + 7$ *besteht das volle System lediglich aus den drei Elementarinvarianten*

$$Z_1, \ Z_2, \ Z_3.$$

*Ihre volle Unabhängigkeit ist evident, also ist jede Simultaninvariante durch sie eindeutig darstellbar.**)

II. Die Congruenzen 56) gelten für $n \equiv 3$ mod. 8 nur modulo 4 genommen, also kann nur [vgl. 54)] $r, s, \varrho, \sigma, \tau = 0$ oder $r = 0$ $s = 4$ $\varrho = 0$ $\sigma = \tau = 1$ sein. Wenn aber von den Zahlen r, s, $r + s$ irgend zwei gleich sind, so fallen zwei der reducirten Formen zusammen, z. B. die Formen 52) in die von 40) und in

$$\mathbf{C}\, z_{22}\, z_{33} \left(z_{22}^{2\mu}\, z_{33}^{2\nu} + z_{33}^{2\mu}\, z_{22}^{2\nu}\right) \left(z_{23}^{4} + z_{32}^{4}\right),$$

wo die erste Klammer offenbar auf eine ganze Function von z_{11}^2 und Z_i' zurückkommt. *Daher enthält das volle System die 6 Formen*

---

*) Diese Eindeutigkeit ist mit der Bemerkung des § 17 nicht im Widerspruch, denn das zweite Reductionsprincip von § 19 ist keine Umformung jener früheren Art.

$$\left.\begin{array}{c} Z'_1,\ Z'_2,\ Z'_3 \\ Z_\lambda^{(4)} = \mathbf{C}\, z_{11}^{2\lambda} z_{22} z_{33} (z_{23}^4 + z_{32}^4) \quad (\lambda = 0, 1, 2) \end{array}\right\} \quad 57)$$

Die *lineare Unabhängigkeit* derselben verificirt man folgendermassen. Sicher kann $Z_0^{(4)}$ nicht auf Z'_i zurückgeführt werden; also fragt sich nur, ob sich $Z_1^{(4)}, Z_2^{(4)}$ durch $Z_0^{(4)}, Z'_i$ ausdrücken lassen. Dazu müsste erstens das Aggregat $\alpha Z_1^{(4)} + \beta Z'_1 Z_0^{(4)}$ in z_{ii} allein symmetrisch gemacht werden können, während doch keine Potenzen von z_{ik}^8 vorkommen, die das zu bewirken vermöchten, da solche allein eine Umformung durch F, Φ zulassen. Und setzen wir zweitens eine Relation vom Gewichte 10 an, so findet man, dass das Glied mit $Z_0^{(4)}$ fehlen, also schon $\alpha Z_1^{(4)} Z'_1 + \beta Z_2^{(4)}$ durch Z'_i darstellbar sein müsste, was wiederum nicht geht.

Dagegen bestehen nach p. 86 *Relationen höheren Grades* zwischen den 6 Formen. Nun erkennt man durch Bildung der Producte und Quadrate $Z_\lambda^{(4)} Z_{\lambda'}^{(4)}$ leicht, dass die Darstellung von

$$Z_\lambda^{(4)} Z_{\lambda'}^{(4)} + \mathbf{C}\, z_{11}^2 z_{22} z_{33} (z_{22}^{2\lambda} z_{33}^{2\lambda'} + z_{33}^{2\lambda} z_{22}^{2\lambda'}) (Z_1'^2 - 2Z'_2 - 2 z_{11}^4)(z_{13}^4 + z_{31}^4) \quad 58)$$

nur die Z'_i, und die der cyclischen Summe $\mathbf{C}$ allein die $Z_\lambda^{(4)}$ nur linear enthält. Aus dieser Bemerkung entspringen Identitäten, welche erlauben, alle Functionen der $Z_\lambda^{(4)}$ von beliebigen Graden auf lineare zurückzuführen. Sie lauten, wenn wir die additiven Functionen von Z'_i unterdrücken,

$$\left.\begin{array}{rl} Z_0^{(4)2} & \equiv 2 Z'_3 Z_0^{(4)} - Z_1'^2 Z_1^{(4)} + 2 Z'_1 Z_2^{(4)} \\ Z_0^{(4)} Z_1^{(4)} & \equiv -(Z_1'^3 - 2 Z'_1 Z'_2 + 2 Z'_3) Z_1^{(4)} + Z_1'^2 Z_2^{(4)} \\ Z_1^{(4)2} & \equiv - Z'_3 (Z_1'^2 - 2 Z'_2) Z_0^{(4)} + 2 Z'_3 Z_2^{(4)} \\ Z_0^{(4)} Z_2^{(4)} & \equiv - Z'_2 Z_0^{(4)2} + Z'_1 Z_0^{(4)} Z_1^{(4)} - Z_1^{(4)2} \\ Z_1^{(4)} Z_2^{(4)} & \equiv - Z'_3 Z_0^{(4)2} + Z'_1 Z_1^{(4)2} \\ Z_2^{(4)2} & \equiv - Z'_3 Z_0^{(4)} Z_1^{(4)} + Z'_2 Z_1^{(4)2}. \end{array}\right\} \text{modd. } Z'_1, Z', Z'_3 \quad 59)$$

Demnach genügt zur Darstellung einer beliebigen Simultaninvariante m. Ordnung eine in den Z'_i allgemeine Function des Gewichtes m, weche die $Z_\lambda^{(4)}$ nur linear enthält. Indem wir verlangen, dass nur solche in $Z_\lambda^{(4)}$ lineare Aggregate einzuführen sind, bekommen wir auch für den II. Hauptfall eine eindeutige Darstellungsform.

III. Endlich ergeben sich bei $n \equiv 1$ mod. 4 aus 54) für die Exponenten der reducirten Formen 53) die Wertsysteme

		$n \equiv 5$			$n \equiv 1$ mod. 8		
r	s	ϱ	σ	τ	ϱ	σ	τ
0	2	0	1	1	0	3	3
0	4	0	2	2	0	2	2
0	6	0	3	3	0	1	1
2	2	1	1	2	3	3	2
2	4	1	2	3	3	2	1

60)

und daraus, unter Beachtung der bei II gemachten weiteren Reduction, $4 \,.\, 3 + 1 \,.\, 6 = 18$ Formen. *Das volle System besteht aus 21 Formen*, nämlich für $n = 8h + 5$

$$\left.\begin{array}{l} Z''_1,\ Z''_2,\ Z''_3 \\ \left.\begin{array}{l} Z_\lambda^{(0,2)} = \mathbf{C}\, z_{11}^{4\lambda} z_{22} z_{33} (z_{23}^2 + z_{32}^2) \\ Z_\lambda^{(0,4)} = \mathbf{C}\, z_{11}^{4\lambda} z_{22}^2 z_{33}^2 (z_{23}^4 + z_{32}^4) \\ Z_\lambda^{(0,6)} = \mathbf{C}\, z_{11}^{4\lambda} z_{22}^3 z_{33}^3 (z_{23}^6 + z_{32}^6) \end{array}\right\} (\lambda = 0, 1, 2) \\ \left.\begin{array}{l} Z_\nu^{(2,2)} = \mathbf{C}\, z_{11} z_{22} z_{33}^{4\nu+2} (z_{13}^2 z_{23}^2 + z_{31}^2 z_{32}^2) \\ Z_{\mu,\nu}^{(2,4)} = \Sigma z_{11} z_{22}^{4\mu+2} z_{33}^{4\nu+3} (z_{13}^2 z_{23}^4 + z_{31}^2 z_{32}^4) \end{array}\right\} \begin{pmatrix} \mu = 0, 1 \\ \nu = 0, 1, 2 \end{pmatrix}. \end{array}\right\} \quad 61)$$

Eine lineare Abhängigkeit zwischen den Formen scheint nicht zu bestehen; eine Discussion der höheren Relationen wird durch die grosse Zahl unabhängiger Identitäten weitläufig. Indessen ist ersichtlich, dass, wie im II. Fall, Pro-

ducte und Potenzen der Formen 61), abgesehen von Z_i'', durch lineare Aggregate derselben ersetzbar sind. Genau entsprechend folgt mit Hilfe von 60) das volle System für $n = 8h + 1$.

Es erübrigt noch, auch *das volle Invariantensystem für die algebraische Darstellung der modularen Schnittsystem-Correspondenzen auf der Curve 4. Ordnung* aufzustellen. Alle Betrachtungen dieses Capitels vereinfachen sich, wenn man nur mit den Quadraten der Variabelen operirt

$$\xi_i = x_i^2, \quad \eta_i = y_i^2, \quad \zeta_{ik} = x_i^2 y_k^2, \tag{62}$$

bleiben jedoch im wesentlichen in Kraft.

Für $n = 4h + 3$ wird das volle System gebildet von den Elementarinvarianten

$$\left.\begin{aligned} Z_1 &= \zeta_{11} + \zeta_{22} + \zeta_{33}, \\ Z_2 = \zeta_{11}\zeta_{22} + \zeta_{22}\zeta_{33} + \zeta_{33}\zeta_{11}&, \quad Z_3 = \zeta_{11}\zeta_{22}\zeta_{33}. \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

Dagegen treten für $n = 4h + 1$ zu

$$\left.\begin{aligned} Z_1' &= \zeta_{11}^2 + \zeta_{22}^2 + \zeta_{33}^2, \\ Z_2' = \zeta_{11}^2\zeta_{22}^2 + \zeta_{22}^2\zeta_{33}^2 + \zeta_{33}^2\zeta_{11}^2&, \quad Z_3' = \zeta_{11}^2\zeta_{22}^2\zeta_{33}^2, \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

hinzu $Z_\lambda^{(2)} = C\zeta_{11}^{2\lambda}\zeta_{22}\zeta_{33}(\zeta_{23}^2 + \zeta_{32}^2) \quad (\lambda = 0, 1, 2).$

Sie bilden ein System von 6 linear unabhängigen Fundamentalformen, durch welches sich die allgemeine Simultaninvariante eindeutig darstellt in der Form

$$Z_0^{(2)} Z^{(m-4)} + Z_1^{(2)} Z^{(m-6)} + Z_2^{(2)} Z^{(m-8)} = 0 \quad \left(m = \frac{N}{4}\right), \tag{65}$$

wenn $Z^{(k)}$ die allgemeine ganze Function k. Gewichtes der Z_i' bedeutet.

V. Capitel.

Irrationale Modulargleichungen.

§ 21.

Bildungsmethode der Correspondenzgleichung.

Die Gleichung einer Modularcorrespondenz n. Grades der discutirten besonderen Classe kann unmittelbar auf einen allgemeinen Ansatz gebracht werden, dessen linke Seite eine ganze Function des Gewichtes m derjenigen Fundamentalinvarianten ist, die nach § 20 zu einer Gradzahl n der gegebenen Form modulo 8 gehören. Enthält der Ansatz alle nichtelementaren Invarianten des bezüglichen vollen Systems linear, so ist er eindeutig bestimmt. Es bleiben nur die numerischen Coefficienten zu berechnen, wozu man auf die Reihenentwickelungen der gegebenen Modulfunctionen zu recurriren hat.

Wir können nun entweder nach III 13), 47) ausgehen von

$$\left.\begin{aligned} x_1 = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{8}} \sum_0^\infty q^{k\frac{k+1}{2}}, \quad x_2 = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{2k^2}, \quad x_3 = \sqrt{\varepsilon} \sum_{-\infty}^{\infty} q^{k^2}, \\ x_1 x_2 x_3 = \sqrt{2\varepsilon} \sum_1^\infty \left(\frac{-2}{r}\right) r\, q^{\frac{r^2}{8}} \quad (r \text{ ungerade}) \end{aligned}\right\} \quad 1)$$

oder, wie es sich für die Rechnung einfacher zeigt, von den Entwickelungen der Producte in I 3)

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{8}} (1+q^2+q^4+2q^6+2q^8+3q^{10}+4q^{12}+\ldots.) \\ x_2 &= \quad (1-q-q^3+q^4-q^5+q^6-q^7+2q^8-2q^9+2q^{10}\ldots) \\ x_3 &= \sqrt{\varepsilon}\, (1+q+q^3+q^4+q^5+q^6+q^7+2q^8+2q^9+2q^{10}\ldots) \\ & x_1 x_2 x_3 = \sqrt{2\varepsilon}\, q^{\frac{1}{8}} \end{aligned}\right\} \quad 2)$$

Daraus folgen die Entwickelungen für die Coordinaten y_i aller zugeordneten Punkte, aber infolge der Irreducibilität der Gleichung genügt es zur Coefficientenbestimmung, durch Einsetzung der Reihenentwickelungen nur eines ihrer Wurzelsysteme das Bestehen der Identität in q nachzuweisen. Nun erhalten wir die Coordinaten z_i des zu $n\omega$ gehörigen Punktes, indem wir in x_i q durch q^n ersetzen. Gehen wir dann von den z_i nach II 34) zu den y_i über, so ist unter Vernachlässigung eines gemeinsamen Factors

$$\left.\begin{array}{l} y_1=\left(\frac{2}{n}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\theta_2\left(0,\frac{n\omega}{2}\right),\ y_2=\theta_0(0,2n\omega),\ y_3=\varepsilon^{\frac{n}{2}}\theta_3(0,n\omega) \\ \text{oder auch} \\ y_1=\left(\frac{2}{n}\right)\sqrt{2}\,\Pi_1(q^n),\quad y_2=\Pi_2(q^n),\quad y_3=\varepsilon^{\frac{n}{2}}\Pi_3(q^n). \end{array}\right\} \quad 3)$$

Im folgenden seien die Definitionen durch die Producte zu Grunde gelegt. Dann haben wir zunächst

$$z_{11}=\left(\frac{2}{n}\right)2q^{\frac{n+1}{8}}(1+q^2+\ldots),\ z_{22}=1-q-\ldots,\ z_{33}=\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}(1+q+\ldots). \quad 4)$$

Die auftretende Einheitswurzel macht *eine Unterscheidung von n modulo 16* notwendig.

Im I. Hauptfall lautet der allgemeine Ansatz

$$\Sigma\, a_{\alpha\beta\gamma}\, Z_1^\alpha Z_2^\beta Z_3^\gamma = 0 \quad 5)$$

wo für α, β, γ alle Lösungen der diophantischen Gleichung

$$\alpha+2\beta+3\gamma=m \quad 6)$$

zu nehmen sind. Nun haben die Elementarinvarianten folgende Anfangspotenzen

$$\left.\begin{array}{ll} n\equiv 7 \text{ mod.} 16 & Z_1=-2q(1+..),\ Z_2=-(1+..),\ Z_3=-2q^{\frac{n+1}{8}} \\ n\equiv 15 & Z_1=\ \ 2(1+..),\ Z_2=\ (1-..),\ Z_3=\ 2q^{\frac{n+1}{8}}. \end{array}\right\} \quad 7)$$

Die Betrachtung derselben gestattet Vereinfachungen des Ansatzes.

Bei $n \equiv 7$ mod. 16 hat das allgemeine Glied von 5) die Anfangspotenz $q^{\alpha+\gamma\frac{n+1}{8}}$. Ordnet man also alle Terme mit constantem γ in eine Gruppe, so können nur Terme verschiedener Gruppen mit derselben Potenz von q beginnen. *Somit müssen insbesondere alle Coefficienten* $a_{\alpha\beta 0} = 0$ *sein, in welchen* $\alpha < \frac{n+1}{8}$. Dadurch fallen zahlreiche von Z_3 freie Terme von vornherein weg. *Für einen Primzahlgrad wo* $m = \frac{n+1}{8}$, *lautet der Ansatz nur noch*

$$Z_1^m + Z_3 Z^{(m-3)} = 0, \tag{8}$$

wenn $Z^{(m-3)}$ eine allgemeine Invariante des Gewichtes $m-3$ bedeutet.

Eine analoge Reduction im Falle $n \equiv 15$ mod. 16 wird möglich, wenn wir *statt* Z_2 *einführen* $Z_{2'}$ *durch*

$$Z_{2'} = Z_1^2 - 4 Z_2 \tag{9}$$

mit dem Anfangsgliede $4q^2$ (vorausgesetzt, dass $n > 15$). Die obigen Betrachtungen bleiben aber, da für $n \equiv 7$ mod. 16 $Z_{2'}$ wie Z_2 beginnt, auch noch giltig, wenn wir statt 5) *für den ersten Hauptfall allgemein den Ansatz* brauchen

$$\Sigma a_{\alpha\beta\gamma} Z_1^\alpha Z_{2'}^\beta Z_3^\gamma = 0. \tag{10}$$

Für $n \equiv 15$ mod. 16 modificiren sich dann jene Ueberlegungen dahin, *dass* $a_{\alpha\beta\gamma} = 0$, *wenn* $\beta < \frac{n+1}{16}$, *so dass für einen Primzahlgrad nur zu setzen ist*

$$Z_{2'}^{\frac{m}{2}} + Z_3 Z^{(m-3)} = 0. \tag{11}$$

Es mögen nun die Terme des Ansatzes nach $\gamma = 0, 1, 2, \ldots$ in Gruppen und innerhalb derselben bei $n \equiv 7$ mod. 16

nach wachsendem α, bei $n \equiv 15$ nach β geordnet werden. Durch das Nullsetzen der Entwickelungscoefficienten der nach wachsenden Potenzen von q zu ordnenden Glieder erhalten wir ein einfaches System ganzzahliger, linearer Gleichungen für die $a_{\alpha\beta\gamma}$. Die erste derselben enthält ein $a_{\alpha\beta 0}$ und ein $a_{\alpha\beta 1}$, in der zweiten tritt ein neues $a_{\alpha\beta 1}$ hinzu oder zugleich noch ein $a_{\alpha\beta 0}$ oder $a_{\alpha\beta 2}$. *Jeder neu auftretende Coefficient $a_{\alpha\beta\gamma}$ kann so unmittelbar durch eine sehr geringe Anzahl vorhergehender Coefficienten linear ausgedrückt werden.* Das successive Eingehen in das Gleichungssystem ist derart, dass *bei Primzahlgraden jedes $a_{\alpha\beta\gamma}$ durch die erste Gleichung, in der es überhaupt auftritt, ganzzahlig bestimmt* ist, wenn, wie in 8) und 11) geschehen, $a_{m\infty} = 1$, resp. $a_{om0} = 1$ gesetzt wird. *Ausserdem bietet die unbeschränkte Anzahl der Coefficientengleichungen beliebig viele Controlen der Rechnung.*

Verwandte Betrachtungen des Ansatzes und der Coefficientenberechnung knüpfen sich an die für $n \equiv 3$ mod. 8 geltende Gleichungsform, deren linke Seite sich aus Z'_λ und linear aus $Z^{(4)}_\lambda$ aufbaut. Es seien hier nur die Anfangspotenzen angegeben

$$\left.\begin{array}{ll} & Z'_1 = -4q\ldots,\ Z'_2 = -1\ldots,\quad Z'_3 = -4q^{\frac{n+1}{4}} \\ n \equiv 3 \text{ mod. } 16 & Z^{(4)}_0 = -8q\ldots,\ Z^{(4)}_1 = 16\,q^{\frac{n+5}{8}}\ldots,\ Z^{(4)}_2 = -64q^{\frac{n+13}{8}}\ldots \\ n \equiv 11 & Z^{(4)}_0 = 8\,q\ldots,\ Z^{(4)}_1 = 32\,q^{\frac{n+13}{8}}\ldots,\ Z^{(4)}_2 = -16q^{\frac{n+5}{8}}\ldots \end{array}\right\} \quad 12)$$

Dagegen erscheint für den III. Hauptfall eine allgemeine Discussion des Ansatzes nicht mehr tunlich.

Die leichte Uebertragung auf die Schnittsystem-Correspondenzen 8. Stufe zeigt die genauen Analoga der obigen

Ansätze und der Coefficientenbestimmung. Zur letzteren legt man zweckmässig die θ-Reihen zu Grunde, so dass

$$\left.\begin{array}{l}\xi_1=\theta_2(0,\omega),\ \xi_2=\theta_0(0,\omega),\ \xi_3=\varepsilon\theta_3(0,\omega),\ \xi_1\xi_2\xi_3=\frac{\varepsilon}{\pi}\theta_1'(0,\omega),\\ \eta_1=\theta_2(0,n\omega),\ \eta_2=\theta_0(0,n\omega),\ \eta_3=\varepsilon''\theta_3(0,n\omega),\ \eta_1\eta_2\eta_3=\frac{\varepsilon''}{\pi}\theta_1'(0,n\omega).\end{array}\right\}\ 13)$$

Natürlich haben Transformationsgrade, welche auf der Curve 8. Ordnung Schnittsystem-Correspondenzen liefern, dieselbe Eigenschaft auch in Bezug auf die Curve 4. Ordnung, oder *die Schnittsystem-Correspondenzen 16. Stufe und m. Ordnung sind auch solche 8. Stufe, aber 2m. Ordnung. Umgekehrt existiren aber Schnittsystem-Correspondenzen 8. Stufe, welche, als Correspondenzen 16. Stufe betrachtet, nicht mehr zu der besonderen Classe gehören.**)

§ 22.

Fertige irrationale Modulargleichungen.

Nach der dargelegten Methode lassen sich die Gleichungen der modularen Schnittsystem-Correspondenzen oder also die irrationalen Modulargleichungen unserer besonderen Classe unmittelbar berechnen. Die Kriterien des § 14 erlauben sofort alle Transformationsgrade dieser Classe aufzuzählen:

Modulargleichungen 16. Stufe existiren zu den Graden:

A. I. $n\equiv 7 \bmod. 8$,

II. $n\equiv 3 \bmod. 8$, *wenn* n *einen Primfactor* $8h+5$ *oder* $8h+7$,

*) In letzteren Fällen müssen also Gleichungen 8. Stufe aufgestellt werden, während in den ersteren nur die Gleichungen 16. Stufe als die einfacheren zu berechnen sind.

III. $n \equiv 5$ mod. 8, *wenn n einen Primfactor* $4h+3$,

III'. $n \equiv 1$ mod. 8, *wenn n einen Primfactor* $8h+7$ *oder Factoren* $8h+3$, $8h+5$ *zugleich nicht-quadratisch enthält.*

B. Gleichungen 8. Stufe gehören, ausser in den Fällen A, zu den Graden:

I. $n \equiv 3$ mod. 8,

II. $n \equiv 1$ mod. 8, *wenn n einen Factor* $4h+3$ *nicht-quadratisch enthält.*

Als Beispiele fertiger Gleichungen mögen die folgenden dienen. Für die Coefficienten sind jeweilen mindestens *zwei Controlbedingungen* verificirt worden, doch ist dies bei Ordnungszahlen $m \equiv 0$ mod. 3 für den Coefficienten von $Z_3^{\frac{m}{3}}$ nicht direct möglich.*)

A.

I^a. $n \equiv 7$ mod. 16.

$$\left.\begin{aligned}
n=7 \quad & Z_1 = 0 \\
n=23 \quad & Z_1^3 - 4Z_3 = 0 \\
n=39 \quad & Z_1^5 Z_{2'} - 4Z_3(Z_{2'}^2 + 5Z_1^2 Z_{2'} - 2Z_1^4) - 144 Z_1 Z_3^2 = 0 \\
n=55 \quad & Z_1^7 Z_{2'} - 4Z_3(Z_{2'}^3 + 7Z_1^2 Z_{2'}^2 + 10 Z_1^4 Z_{2'} - 2Z_1^6) \\
& - 16 Z_1 Z_3^2 (6Z_{2'} + 19 Z_1^2) + 512 Z_3^3 = 0. \\
n=71 \quad & Z_1^9 - 4Z_3(Z_{2'}^3 + 9Z_1^2 Z_{2'}^2 + 21 Z_1^4 Z_{2'} + 12 Z_{2'}^6) \\
& - 16 Z_1 Z_3^2 (6Z_{2'} + 7Z_1^2) - 64 Z_3^3 = 0.
\end{aligned}\right\} \quad 14)$$

I^b. $n \equiv 15$ mod. 16.

$$\left.\begin{aligned}
n=15 \quad & Z_1 Z_{2'} + 4Z_3 = 0 \\
n=31 \quad & Z_{2'}^2 - 4Z_1 Z_3 = 0 \\
n=47 \quad & Z_{2'}^3 - 4Z_1 Z_3 (Z_1^2 + 6Z_{2'}) - 128 Z_3^2 = 0 \\
n=79 \quad & Z_{2'}^5 - 4Z_1 Z_3 (Z_1^6 + 10 Z_1^4 Z_{2'} + 28 Z_1^2 Z_{2'}^2 + 21 Z_{2'}^3) \\
& - 16 Z_3^2 (7Z_1^4 + 26 Z_1^2 Z_{2'} + 24 Z_{2'}^2) + 512 Z_1 Z_3^3 = 0.
\end{aligned}\right\} \quad 15)$$

---

*) Von einigen Gleichungen ist dieser letzte Coefficient in den citirten Ber. d. k. s. G. d. W. 1885 p. 89 unrichtig angegeben.

*Hier kann für die Elementarinvarianten nach IV 39) und II 34), zur Ueberführung der Gleichungen in die gewöhnlich gebrauchten Formen eingesetzt werden**)

$$\left.\begin{aligned} Z_1 &= \sqrt[4]{\varkappa\lambda} + \sqrt[4]{\varkappa'\lambda'} \mp 1 \\ Z_2 &= \sqrt[4]{\varkappa\varkappa'\lambda\lambda'} \mp \sqrt[4]{\varkappa\lambda} \mp \sqrt[4]{\varkappa'\lambda'} \quad (Z_{2'} = Z_1^2 - 4 Z_2) \\ Z_3 &= \mp \sqrt[4]{\varkappa\varkappa'\lambda\lambda'}, \end{aligned}\right\} \quad 16)$$

wo die oberen oder die unteren Vorzeichen gelten, je nachdem $n \equiv 7$ *oder* $n \equiv 15$ mod. 16.

II. $n \equiv 3$ mod. 8.

$$n = 35 \quad Z_1'^3 - 8 Z_1' Z_2' + 8 Z_3' - 4 Z_0^{(4)} = 0; \qquad 17)$$

fernere Beispiele liefern $n = 91, 115$ etc. Dabei ist

$$\left.\begin{aligned} & Z_1' = \sqrt{\varkappa\lambda} + \sqrt{\varkappa'\lambda'} - 1, \quad Z_2' = \sqrt{\varkappa\varkappa'\lambda\lambda'} - \sqrt{\varkappa\lambda} - \sqrt{\varkappa'\lambda'}, \quad Z_3' = -\sqrt{\varkappa\varkappa'\lambda\lambda'} \\ & \text{[IV 40) 57)] und, je nachdem } n \equiv 3 \text{ oder } 11 \text{ mod. } 16, \\ & Z_0^{(4)} = \mp (\varkappa\lambda' + \varkappa'\lambda)\sqrt[4]{\varkappa\varkappa'\lambda\lambda'} \pm (\varkappa' - \lambda')\sqrt[4]{\varkappa'\lambda'} \mp (\varkappa - \lambda)\sqrt[4]{\varkappa\lambda} \\ & Z_1^{(4)} = \quad (\varkappa\lambda' + \varkappa'\lambda)\sqrt[4]{\varkappa\varkappa'\lambda\lambda'} \pm (\varkappa' - \lambda')\sqrt{\varkappa\lambda}\sqrt[4]{\varkappa'\lambda'} \mp (\varkappa - \lambda)\sqrt{\varkappa'\lambda'}\sqrt[4]{\varkappa\lambda} \\ & Z_2^{(4)} = -(\varkappa\lambda' + \varkappa'\lambda)\sqrt[4]{\varkappa\varkappa'\lambda\lambda'} \pm (\varkappa' - \lambda')\varkappa\lambda\sqrt[4]{\varkappa'\lambda'} \mp (\varkappa - \lambda)\varkappa'\lambda'\sqrt[4]{\varkappa\lambda}. \end{aligned}\right\} \quad 18)$$

III. $n \equiv 5$ mod. 8.

$$n = 21 \quad Z_1'' - 2 Z_0^{(0,2)} = 0, \qquad 19)$$

— ferner $n \equiv 69, 77, 93$ etc., — mit [IV 41) 61)]

$$\left.\begin{aligned} & Z_1'' = \varkappa\lambda + \varkappa'\lambda' - 1, \quad Z_2'' = \varkappa\varkappa'\lambda\lambda' - \varkappa\lambda - \varkappa'\lambda', \quad Z_3'' = -\varkappa\varkappa'\lambda\lambda' \\ & Z_0^{(0,2)} = -(\sqrt{\varkappa\lambda'} + \sqrt{\varkappa'\lambda})\sqrt[4]{\varkappa\varkappa'\lambda\lambda'} + (\sqrt{\varkappa'} - \sqrt{\lambda'})\sqrt[4]{\varkappa'\lambda'} - (\sqrt{\varkappa} - \sqrt{\lambda})\sqrt[4]{\varkappa\lambda}. \end{aligned}\right\} \quad 20)$$

III'. Beispiele zu $n \equiv 1$ mod. 8 bieten erst $n = 105, 161$ etc.

---

*) Eigentlich sind die Gleichungen mit z_{33}^{m} zu multipliciren und dann $z_{33}^{r}\,|^{(r)}$ wie oben zu interpretiren (r Ordnungszahl).

B.

I. 8. Stufe $n \equiv 3 \bmod. 8.$

$$\left.\begin{aligned} n &= 3 \quad Z_1 = 0 \\ n &= 11 \quad Z_1^3 - 16 Z_3 = 0 \\ n &= 19 \quad Z_1^5 - 16 Z_3 (4 Z_{2'} + 3 Z_1^2) = 0 \\ n &= 27 \quad Z_1^9 - 16 Z_1^2 Z_3 (16 Z_{2'}^2 - 76 Z_1^2 Z_{2'} + 31 Z_1^4) \\ &\qquad - 256 Z_1 Z_3^2 (12 Z_{2'} + 5 Z_1^2) - 12328 Z_3^3 = 0, \end{aligned}\right\} \quad 21)$$

wo nach 13, IV 63) Z_1, Z_2, Z_3 offenbar ebenso zu interpretiren sind wie die für $n \equiv 3 \bmod. 16$ angegebenen Invarianten Z_1', Z_2', Z_3', während wieder $Z_{2'} = Z_1^2 - 4 Z_2$.

II. Beispiele für $n \equiv 1 \bmod. 8$ sind $n = 33, 57$, u. s. w.

Von diesen Gleichungen finden sich in der Litteratur, ausser der bekannten Legendre'schen Gleichung für $n=3$ und der Gützlaff'schen für $n = 7$ (Crelles Journal XII), folgende: für $n = 11$ ist die Gleichung implicite bei Herrn Schröter enthalten (de aequat. modul.); für $n=23$ wurde die obige Form zuerst von Herrn Hurwitz gegeben (Math. Ann. XVII p. 69), sie lässt sich aber auch aus der complicirteren Schröter'schen Gestalt (l. c., vgl. Acta math. V p. 208) gewinnen; endlich ist noch $n = 47$ aus der von Herrn Hurwitz berechneten Form abzuleiten.

Die einfachsten Fälle $n = 3, 7$ erfordern nach der vorgeführten Methode überhaupt keine Rechnung, da die Gleichungen notwendig die bilinearen Invarianten sind, gleich Null gesetzt. Aber auch in den folgenden Fällen ist das Verfahren so expeditiv, dass n = 11, 21, 23, 31 nur die numerische Berechnung eines einzigen, die übrigen Grade die von immer nur sehr wenigen Coefficienten erfordern. *Es ist einleuchtend, welchen Rechnungsvorteil gegenüber der gewöhnlichen Ordnung nach Potenzen von φ, ψ*

deren Zusammenfassung in Invarianten gewährt. Zugleich erreicht man dadurch mit Notwendigkeit die einfachste und durchsichtigste Gleichungsform, weil die ganze Structur durch das System der Simultaninvarianten von vornherein eindeutig bestimmbar ist.

§ 23.

Geometrische Interpretation.

Die irrationalen Modulargleichungen gestatten unmittelbar geometrische Deutung, wenn wir die Anschauungen des § 9 verwenden. Sollen vorerst die Moduln selbst als rechtwinklige Coordinaten gedacht werden können, so greifen wir wieder auf die x_i und z_i der Punkte der Hauptcorrespondenz zurück. *Wir betrachten die Zuordnungen, welche durch das Nullsetzen der Elementarinvarianten entstehen,* beispielsweise für den I. Hauptfall 16. Stufe.

Das Gebilde $Z_1 = 0$ ist linear, ordnet also einem Punkte (x) eine gerade Reihe zu

$$Z_1 = x_1 z_1 + x_2 z_2 \mp \varepsilon x_3 z_3 = 0, \quad (n \equiv 7, 15 \text{ mod. } 16) \qquad 22)$$

d. h. definirt einfach eine *Polarreciprocität: Die Gerade 22) ist die Polare von (x) in Bezug auf den Kegelschnitt*

$$z_1^2 + z_2^2 \mp \varepsilon z_3^2 = 0, \qquad 23)$$

welcher zu den den Undulationsquadrupeln [I 38)] eingeschriebenen 48 Kegelschnitten und zwar zur Untergruppe $\mathbf{S}^8, \mathbf{T}$ (l. c.) gehört.

In der durch $Z_1 = 0$ definirten Correspondenz entsprechen dem Punkte (x) die 8 Schnittpunkte (z) seiner Polare in Bezug auf einen der Kegelschnitte 23) mit der Grundcurve. *Hat also (x) den Parameter ω, so haben*

diese Polarenschnittpunkte die Parameter $7\omega, \frac{\omega}{7}, \frac{\omega+16}{7}, \ldots, \frac{\omega+6.16}{7}$. *Diese Zuordnung ist somit der geometrische Ausdruck der Transformation 7. Grades.*

In den beiden zu den Kegelschnitten 23) gehörigen Undulationsquadrupeln berührt eine Curve 4. Ordnung

$$z_1^4 + z_2^4 + i z_3^4 = 0, \tag{24}$$

bezüglich deren (x) den *Polarkegelschnitt* $Z_1^2 - 2Z_2 = 0$ besitzt. Dieser schneidet die Polare $Z_1 = 0$ in denselben Punkten, in welchen ihn zugleich $Z_{2'} = 0$ und

$$Z_2 = x_1 x_2 z_1 z_2 \mp \varepsilon (x_1 z_1 + x_2 z_2) x_3 z_3 = 0 \tag{25}$$

berühren. Da $Z_2 = 0$ ausserdem dem Coordinatendreieck umgeschrieben ist, so genügen diese Daten, um diesen, die zweite Elementar-Invariante repräsentirenden Kegelschnitt zu jedem Punkte leicht zu construiren.

Endlich ist $Z_3 = 0$ eine singuläre Zuordnung, die keiner Erläuterung bedarf.

Aus den *Elementarinvarianten-Curven* folgen, dem Aufbau der Gleichungen entsprechend, Bestimmungsstücke der allgemeinen Correspondenzcurven des I. Hauptfalls. So hat z. B. die dem Punkte (x) durch die Correspondenz 23. Grades zugeordnete Curve 3. Ordnung $Z_1^3 - 4Z_3 = 0$ die Seiten des Coordinatendreiecks in ihren Schnittpunkten mit der Polare $Z_1 = 0$ zu Inflexionstangenten.

Beziehen wir jedoch die Variabelen x_i und y_i auf dasselbe Coordinatendreieck, so gestaltet sich die geometrische Anschauung wesentlich einheitlicher und bedeutungsvoller. Offenbar lassen sich die digredienten Fälle $n \equiv \pm 3$ mod. 8 (p. 39) dadurch auf den cogredienten und den contragredienten Fall zurückführen, dass jeder Punkt (y) durch eine 9-punktige Gruppe $(y^{(0)})$ ersetzt wird, vermöge der Substitutionen $y_i = y_i^{(0)3}$. In dieser Schreibung ordnet dann

eine Correspondenzgleichung einem (x) $9N$ Punkte auf der Curve $y_1^{(0)24} + y_2^{(0)24} + y_3^{(0)24} = 0$ zu, welchen die N Punkte (y) der Grundcurve eindeutig entsprechen. Endlich lassen sich aber auch zu x_i cogrediente y_i dadurch in contragrediente verwandeln, dass man sie durch die Polarreciprocität in Bezug auf $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ in die dualen Coordinaten verwandelt. In diesem Sinn folgt die Deutung aller Fälle leicht aus der des I. Hauptfalles, in welchem je zwei simultane Collineationen sich als die dualistischen Ausdrucksformen einer und derselben Collineation in Punkt- und Liniencoordinaten darstellen.

Fassen wir nun die x_i als Punktcoordinaten, die y_i aber als Liniencoordinaten, stellen also der Grundcurve 8. Ordnung $F = 0$ als dualistische Curve 8. Classe $\Phi = 0$ gegenüber, so definirt die Correspondenzgleichung II 39) *ein solches Fundamentalgebilde der ebenen Geometrie, welches seit Clebsch als ein Connex m. Ordnung und Classe bezeichnet wird. Die Correspondenzen der Grade $n \equiv 7$ mod. 8 sind dann Zuordnungen zwischen Punkten von $F = 0$ und Tangenten von $\Phi = 0$.* Damit wird der Ausdruck der Transformation 7. Ordnung z. B. einfach der, dass dem Punkte (x) auf der Ordnungscurve die von ihm an die Classencurve gehenden 8 Tangenten (y) zugeordnet sind.

Betrachten wir als Elemente des Connexes die Combinationen je eines Punktes (x) und der zugehörigen Classencurve $f_y = 0$, und die dualistischen, so entspricht die Invarianz von f bei den simultanen Substitutionen der geometrischen Eigenschaft, dass *die Collineationen* S^2, T, U *den Connex in sich selbst transformiren, also seine Elemente in Gruppen von je 384 äquivalenten ordnen* [deren Connexcurven jedoch keineswegs collinear sind].

Druckfehler-Verzeichnis.

p.	16, 49	Zeile	1, 22	von	oben	lies	desselben	statt derselben
„	18	„	8	„	„	„	sie	„ ihn
„	18	„	12	„	„	„	$\beta'_{2\nu+6}$	„ $\beta'_{2\nu-6}$
„	20	„	letzte	„	„	„	ε^{-1}	„ ε^{-2}
„	24	„	letzte	„	„	„	$-4X_{16}^3$	„ $4X_{16}^3$
„	29	„	14	„	„	„	P_i	„ P'_i
„	34	„	22	„	„	„	20)	„ 21)
„	37	„	10	„	„	„	$\left(\frac{2}{n}\right)$	„ $\frac{2}{n}$
„	42	„	4 u. 5	„	„	„	p. 41, 34	„ p. 40, 33
„	42	„	14	„	„	„	$f_1 f_2 \ldots = 0$	„ $f_1, f_2 \ldots = 0$
„	46	„	10	„	„	„	$\sqrt{\varepsilon\theta_2\theta_0\theta_3}$	„ $\sqrt{\varepsilon\theta_1\theta_2\theta_3}$
„	46	„	13	„	„	„	ω	„ θ
„	47	„	7	„	„	„	$\pi\theta_3^2$	„ θ_3^2
„	47	„	10	„	„	„	θ_3	„ θ_1
„	48	„	letzte	„	„	„	p. 12	„ p. 11
„	51	„	11	„	„	„	—	„ 21)
„	51	„	17	„	„	„	$(\alpha', \beta', \gamma')$	„ $(\alpha', \beta', \gamma)$
„	52	„	17	„	„	„	15)	„ 16)
„	55	„	4	„	„	„	*und je*	„ *und*
„	56	„	20	„	„	„	$I_{\lambda'\mu'\nu'}$	„ $I_{\gamma'\mu'\nu'}$
„	63	„	13 u. 19	„	„	„	$\prod_{k=1}^{\mu'} a'_k$	„ $\prod_{k=1}^{\mu} a'_k$
„	64	„	16	„	„	„	$\prod_{i=1}^{\mu}(\Sigma\quad)$	„ $\prod_{i=1}^{\mu'}(\Sigma$
„	70	„	27	„	„	„	m	„ m'
„	71	„	18	„	„	„	$n\lambda$	„ $\mu\lambda$
„	76	„	12	„	„	„	$+\frac{1}{h}$	„ $-\frac{1}{h}$
„	77	„	28	„	„	„	$x_2 x_1 x_3$	„ $x_2 x_1 x_2$
„	78	„	5	„	„	„	$y_1^{\alpha'} y_2^{\beta'} y_3^{\gamma'}$	„ $y_1^{\alpha} y_2^{\beta} y_3^{\gamma}$
„	85	„	20	„	„	„	$-(n+1)$	„ $(n+1)$
„	88	„	28	„	„	„	Z'_1, Z'_2, Z'_3	„ Z'_1, Z', Z'_3
„	90	„	24	„	„	„	$=1$	„ $=0$

Lebenslauf.

Ich, Ernst Wilhelm Fiedler, reformirter Confession, am 22. Juli 1861 in Chemnitz als Sohn des Prof. Dr. Otto Wilhelm Fiedler geboren, genoss meinen Unterricht in Zürich, wo mein Vater seit 1867 wirkt und eingebürgert ist. Von Ostern 1873 an besuchte ich das Zürcher Gymnasium und verliess es im Herbst 1879 mit dem Zeugnis der Reife. Die reiche Anregung, die ich durch meinen Vater empfing, wandte mein Interesse schon auf der Schule der Mathematik zu.

Ich begann meine mathematischen Studien an der Fachlehrerabteilung des eidgenössischen Polytechnicums in Zürich und verfolgte vorzugsweise die geometrische Richtung. Während 6 Semestern hörte ich die Vorlesungen meines Vaters und der Herren Proff. G. Frobenius, C. F. Geiser, A. Herzog, F. Weber, R. Wolf, C. Culmann, J. Scherr, G. Kinkel, und nahm in den beiden letzten Semestern an den Uebungen des mathematischen Seminars teil. 1881 liess ich mich zugleich an der Universität Zürich immatriculiren und hörte die Herren Proff. A. Meyer, L. Kym, L. Hermann. Ein hartnäckiges Kopfleiden war mir mehrfach hinderlich.

Im Herbst 1882 bezog ich die Universität Berlin, um die Vorlesungen der Herren Proff. L. Kronecker und K. Weierstrass zu hören. Ausserdem besuchte ich in 3 Semestern die Vorlesungen der Herren Proff. E. E. Kummer,

G. Kirchhoff, H. von Helmholtz, G. Hettner, H. von Treitschke, F. Paulsen und war Mitglied des von den Herren Kummer, Weierstrass und Kronecker geleiteten mathematischen Seminars.

Ostern 1884 gieng ich nach Leipzig. Ich widmete mich den Vorlesungen und namentlich dem Seminar des Herrn Prof. F. Klein, hörte auch die Vorlesungen der Herren Proff. W. Wundt und F. Schur.

Nächst meinem lieben Vater fühle ich mich zum grössten Danke verpflichtet Herrn Prof. Dr. L. Kronecker und Herrn Prof. Dr. F. Klein, deren Güte mir durch ihren persönlichen Verkehr eine Fülle vielseitigster Anregung zu Teil werden liess.

Separatabdruck aus der
Vierteljahrschrift der Zürcher Naturforschenden Gesellschaft. April 1884.

Sitzung vom 17. December 1883.

Herr Prof. Fiedler machte folgende Geometrische Mittheilungen: Zu zwei Steiner'schen Abhandlungen. Nachdem bei Anlass der Steiner-Ausgabe der Berliner Akademie der Wissenschaften festgestellt worden war, dass ein vielleicht bezügliches Steiner'sches Manuscript von 1826 verschwunden sei, habe ich seit 1878 die Idee der Cyklographie, die ich in den ersten sechziger Jahren gefasst hatte, als eine beherrschende

Idee in einem immerhin ausgedehnten Gebiete nachgewiesen, nämlich in der Geometrie der Kreise und Kugeln, der Theorie der reciproken Radien, der Theorie der Kegelschnitte aus Kreissystemen und der der Rotationsflächen zweiten Grades; beginnend in der III. und IV. meiner „Geom. Mitthl." im 24. Bd. unserer Vierteljahrsschrift, fortgesetzt im 25. Bd. mit der Theorie der Kegelschnitte aus Kreissystemen in Berührung, im 26. Bd. mit der der Kreissysteme unter vorgeschriebenen Winkeln, und dann zusammengefasst in elementarer Entwicklung in dem Buche „Cyklographie", das ich im Anfang vorigen Jahres hier vorlegte. Dort habe ich in der Vorrede und in § 170 zwei grosse Steiner'sche Abhandlungen von 1847 und 1852 als in diesen Untersuchungskreis gehörig bezeichnet, und ich habe für den Hauptinhalt der von 1852 datirten Abhandlung in der mathematischen Section der Versammlung der Schweiz. Naturforscher in Zürich am 8. Aug. a. c. diesen Zusammenhang näher erörtert.

Hier will ich es für die früher datirte der beiden Abhandlungen nachweisen, muss aber dafür wegen des Zusammenhanges derselben an die andere anknüpfen.

Cyklographisch wird der Kegelschnitt als Durchdringung von unzählig vielen parallelaxigen gleichseitigen Rotationshyperboloiden resp. als Orthogonalprojection dieser Durchdringung nach der Richtung der Axe betrachtet. Unter jenen Hyperboloiden sind im Allgemeinen unzählig viele einfache und unzählig viele zweifache und jene gehen durch die Grenzformen von zwei gleichseitigen Rotationskegeln hindurch in diese über. Wenn aber insbesondere der Kegelschnitt eine Hyperbel ist, deren Nebenaxe in der gemeinsamen Meridianebene der sich durchdringenden Flächen liegt, so sind diese Kegel nicht reell und alle durch die Curve gehenden Hyperboloide sind einfache. Man zeigt sofort, dass die Mittelpunkte aller Flächen dieses Büschels in einer Geraden liegen, im ersten Falle der Verbindungslinie der Kegelspitzen. Man kann nun kurz sagen, dass die Betrachtung des Kegelschnittes als Durchdringung der einfachen Hyperboloide überhaupt den Leitfaden gibt für die überraschenden Ergebnisse der Abh. von 1852, während man durch Hervorhebung der beiden Kegel im Büschel der sich durchdringenden Flächen den für

die Abh. von 1847 erhält. Ich hebe von dem ersten nur die Grundanschauung und ein Beispiel hervor, weil sie mir bei dem zweiten nützlich sein werden.

Wenn man den Durchdringungskegelschnitt von zwei parallelaxigen einfachen gleichseitigen Rotationshyperboloiden orthogonal in der Richtung der Axen projicirt, so ist die Projection ein Kegelschnitt in doppelter Berührung mit den Umrissen oder Kehlkreisbildern der Hyperboloide. Ein bestimmter Punkt P des Kegelschnittes ist der Schnittpunkt von zwei Paaren von geraden Mantellinien der beiden Hyperboloide und wenn wir eine Mantellinie des einen und eine des andern Hyperboloids bis zum Schnitt M_1, M_2 mit dem zugehörigen Kehlkreis verfolgen, so erkennen wir aus der 45° Neigung dieser Geraden zu den Kehlkreisebenen und also zur Projectionsebene, dass $PP_1 = P_1 M_1$, $PP_2 = P_2 M_2$ ist, wenn wir mit P_1, P_2 die Orthogonalprojectionen von P auf beide Kehlkreisebenen resp. bezeichnen. Erinnern wir uns noch, dass die Projectionen $P_1 M_1$, $P_2 M_2$ der Mantellinien PM_1, PM_2 auf die Kehlkreisebenen Tangenten der respectiven Kehlkreise in M_1 resp. M_2 sind und dass für Punkte P zwischen beiden Kehlkreisen die Summe der Distanzen PP_1 und PP_2 constant, für Punkte P ausserhalb der durch sie begrenzten Schicht aber die Differenz der Distanzen PP_1 und PP_2 constant ist, nämlich gleich dem Abstand d der Kehlkreisebenen von einander, so haben wir den Fundamentalsatz der Steiner'schen Abhandlung von 1852 bewiesen (er ist wie alle seine merkwürdigen Consequenzen von Steiner ohne Beweis gegeben): Der Ort eines Punktes, für welchen die Summe oder der Unterschied der Längen der von ihm aus an zwei feste Kreise seiner Ebene gehenden Tangenten constant ist, ist ein Kegelschnitt, der diese beiden Kreise je doppelt berührt und dessen eine Axe in die Centrale dieser Kreise fällt. Man sieht sofort, dass man, wenn diese Kreise und die constante Länge d gegeben sind, den zugehörigen Kegelschnitt construiren kann als Projection der Durchdringung von zwei einfachen gleichseitigen Rotationshyperboloiden, deren Kehlkreise durch jene orthogonal projicirt und im Raum durch den Abstand d ihrer Ebenen getrennt sind; man erhält in der That äusserst

einfache und bequeme Constructionen, welche zum Theil durch Steiner angegeben wurden.

Man kann aus dieser Anschauung aber unmittelbar die ganze Reihe der Resultate ablesen (und zwar zum Theil genau in der von Steiner ohne Beweise gegebenen Ordnung), mit denen er in der genannten Abh. den Leser förmlich überschüttet. Desshalb liess mich diese meine Anschauung sofort einen Druckfehler erkennen, welcher der neuen Gesammtausgabe im § 3 dieser Abh. passirt ist (Bd. 45, p. 194, und II, p. 452, Zl. 4).

Ich citire nur noch ein Beispiel; Steiner betrachtet die zu zwei festen Kreisen für die verschiedenen Werthe der constanten Länge d entstehenden Kegelschnitte und sagt z. B.: Jeder Kegelschnitt des Systems schneidet aus jeder der gemeinsamen Tangenten der Hauptkreise eine der zugehörigen Constanten d gleiche Länge aus. Es ist einer von den zahlreichen Sätzen dieser Abh., welche heute noch unbewiesen sind, während sich doch zahlreiche Consequenzen an ihn knüpfen. Meine Anschauung beweist ihn höchst einfach und zeigt, wie man ihn so zu sagen entdecken muss. In der gemeinsamen Tangente der Grundkreise als Kehlkreise der Hyperboloide projiciren sich zwei Paare von unter 45° geneigten Mantellinien, die sich in zwei Punkten des Durchdringungskegelschnittes schneiden; es entsteht in der durch jene Tangente gehenden Verticalebene ein Rechteck von 45° Linien, in welchem zwei Gegenecken den respectiven Kehlkreisen angehören und daher den Verticalabstand d von einander haben; und in Folge dessen ist der Horizontalabstand der beiden andern Ecken auch d, womit der Satz evident ist. Dass die betrachteten Schnittpunkte in Kreisen eines concentrischen Systems liegen, aus dem Mittelpunkt der Centrale, sieht man daraus auch; die Sätze über die gemeinsamen Tangenten, ihre Berührungspunkte- und Schnittpunkte-Quadrupel, mit denen Steiner's Abhandlung beginnt, sind die Specialfälle davon. Und dass die Kegelschnitte des Systems sich paarweis in solchen concentrischen Quadrupeln schneiden, auch. Jener Fundamentalsatz der Steiner'schen Abhandl. ist auch analytisch behandelt worden, aber von den massenhaften Folgerungen, die er daraus zu ziehen wusste, ist kaum eine analytisch bewiesen. Ich habe immer geglaubt, dass Steiner eine geometrische An-

schauungsweise besessen habe, die ihn zu denselben leitete. Eine solche ist auch die hier erörterte, die ich ja lange für mit der seinigen identisch hielt.

Ich wende mich zu der Abhandl. von 1847. (37. 161 f., II, 389 f.). Sie handelt von den Relationen zwischen dem Punkte eines Kegelschnittes und dem Fusspunkte seiner Normale in der Hauptaxe zu den Brennpunkten desselben etc. und ihr Zusammenhang mit jener von 1852 ist an mehreren Stellen evident, während doch der Ausgangspunkt als ein total anderer erscheint. Denn es ist die Aufgabe: Aus der Spitze C eines Dreiecks ABC ist nach einem Punkte D der Grundlinie die Gerade CD zu ziehen, so dass das Quadrat von CD in einem gegebenen constanten Verhältniss zu dem Rechteck $AD.BD$ stehe; und für gegebene Grundlinie AB die Grenzlage der Spitze C zu finden, über die hinaus die Erfüllung der Forderung unmöglich wird. Denkt man aber einen Punkt D der Grundlinie AB, so ist damit $AD.BD$ und als dessen const. vielfaches CD bestimmt und der Grenzort ist die Enveloppe des Kreises aus D mit CD; die zugehörigen Tangenten schneiden sich im vierten harmonischen Punkt von C in Bezug auf AB: Aus einem System seiner doppelt berührenden Kreise wird der umhüllende Kegelschnitt gebildet. Es ist also hier vorzugsweise die Fragestellung, über deren Entstehung man Auskunft bedarf.

Diese Steiner'sche Abhandlung enthält wie die von 1852 eine erstaunliche Fülle von Resultaten, die aus der elementaren Fragestellung entspringen, gibt aber wenigstens in der ersten Hälfte auch Beweise für dieselben. Ein wesentlicher Theil dieser Ergebnisse muss dem Kundigen wie ein Stück aus einer Gesammtheit erscheinen, in der die Abh. von 1852 einen andern Theil bildete. Ich zeige nun, dass man diese Resultate erhält, wenn man in der vorher erläuterten geometrischen Anschauung besonders die durch den Kegelschnitt gehenden gleichseitigen Rotationskegel zusammen mit einem der Hyperboloide hervorhebt.

Hat man zwei parallelaxige gleichseitige Rotationskegel $M_1 C_1$ und $M_2 C_2$, deren Grundkreise K_1, K_2 in der Tafel sich in den Punkten P, P^* durchschneiden, so ist der Potenzkreis derselben, dessen Mittelpunkt (J oder E) auf der Ver-

bindungslinie der Spitzen $M_1 M_2$ liegt (J oder E je nachdem diese auf verschiedenen Seiten der Tafel liegen oder auf derselben, d. h. je nachdem die Durchdringung Ellipse oder Hyperbel ist), der Kehlkreis eines durch ihn gehenden gleichseitigen Rotationshyperboloides und wird somit von der Orthogonalprojection der Durchdringung doppelt in P und P^* berührt. Damit gelangen wir unmittelbar und in zwingender Weise zu den Steiner'schen Formeln und Sätzen.

Zuerst für die Ellipse. Die Kreise um C_1, C_2 durch P, P^* haben die Radien r_1, r_2, ihre Centraldistanz ist $2c$; ihr innerer Aehnlichkeitspunkt J, der von C_1, C_2 die Entfernungen i_1, i_2 besitzt, ist der Mittelpunkt ihres innern durch P, P^* gehenden Potenzkreises vom Radius r_i; und da dieser in P, P^* von der Projection der Durchdringungsellipse berührt wird, so ist r_i die Länge der Normale in P zwischen Fusspunkt und Hauptaxe; r_1 und r_2 oder $C_1 P$ und $C_2 P$ sind die Radien vectoren von P, c ist die lineare Excentricität des Kegelschnittes, dessen Hauptaxe $AB = 2a = r_1 + r_2$ ist. Nun hat man $(r_1 + r_2) : 2c = r_1 : i_1 = r_2 : i_2$ oder $i_1 = \frac{2cr_1}{r_1 + r_2}$, $i_2 = \frac{2cr_2}{r_1 + r_2}$, natürlich also $i_1 + i_2 = 2c$ und $i_1 r_2 = i_2 r_1$ also auch $i_1 i_2 = \frac{4c^2 r_1 r_2}{(r_1 + r_2)^2}$. Ferner ist die Potenz des innern Aehnlichkeitspunktes $p_i = r_i^2 = (r_1 + i_1)(r_2 - i_2) = r_1 r_2 - i_1 i_2 = r_1 r_2 \left\{ 1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2 \right\} = r_1 r_2 \frac{a^2 - c^2}{a^2}$ mit $i_1 i_2 = \frac{c^2}{a^2} r_1 r_2$ oder auch $r_i^2 = i_1 i_2 \frac{a^2 - c^2}{c^2}$. Die Steiner'schen Grundformeln in ganz anderer aber mindestens ebenso einfacher Ableitung. Mit der Festsetzung der numerischen Excentricität $c : a = e$ und mit $a^2 - c^2 = b^2$ kann man schreiben $i_1 i_2 = e^2 r_1 r_2$, $r_i^2 = (1 - e^2) r_1 r_2 = \left(\frac{1}{e^2} - 1\right) i_1 i_2$. Man hat auch $e = \frac{i_1}{r_1} = \frac{i_2}{r_2}$ und $r_1 + r_2 = (i_1 + i_2) : e = 2c : e = = 2a$; $\frac{c^2}{a^2} = e^2 = \frac{i_1 i_2}{r_1 r_2}$, $\frac{b^2}{a^2} = \frac{r_i^2}{r_1 r_2} = 1 - e^2$, $\frac{b^2}{c^2} = \frac{r_i^2}{i_1 i_2} = \frac{1}{e^2} - 1$.

$$r_i = \frac{b}{a}\sqrt{r_1 r_2} = \frac{b}{c}\sqrt{i_1 i_2}.$$

Auch erhält man den cos. des Winkels zwischen Normale und Radien vectoren, als Cosinus des halben Winkels an der Spitze P im Dreieck $C_1 P C_2$ nach der Regel $\cos \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$ durch $\cos \frac{1}{2}(r_1, r_2) = \sqrt{\frac{(r_1 + r_2 + 2c)(r_1 + r_2 - 2c)}{4 r_1 r_2}} =$ $= \sqrt{\frac{a + c \cdot a - c}{r_1 r_2}} = \frac{b}{\sqrt{r_1 r_2}}$ Die besondere Ellipse für $e^2 = \frac{1}{2}$ verdient Interesse: $2 i_1 i_2 = r_1 r_2 = 2 r_1^2$; $r_1 = i_1 \sqrt{2}, r_2 = i_2 \sqrt{2}$.

Sodann für die Hyperbel. Bei denselben übrigen Bezeichnungen haben wir den äusseren Aehnlichkeitspunkt E der Kreise, mit den Abständen e_1, e_2 von C_1 und C_2 und den zugehörigen Potenzkreis vom Radius $EP = r_e$; und es ist $(r_1 - r_2)$: $2c = r_1 : e_1 = r_2 : e_2$, $e_1 = \frac{2 c r_1}{r_1 - r_2}$, $e_2 = \frac{2 c r_2}{r_1 - r_2}$, $e_1 - e_2 = 2c$, $e_1 r_2 = e_2 r_1$, $r_1 - r_2 = 2a$ der Hauptaxe.

Also $e_1 e_2 = \frac{4 c^2 r_1 r_2}{(r_1 - r_2)^2} = \frac{c^2}{a^2} r_1 r_2$. Die Potenz des äussern Aehnlichkeitspunktes E ist $p_e = r_e^2 = (e_1 - r_1)(e_2 + r_2) =$ $= e_1 e_2 - r_1 r_2 = r_1 r_2 \left\{\frac{c^2}{a^2} - 1\right\} = r_1 r_2 \frac{c^2 - a^2}{a^2}$.

Mit $c : a = e$, der numerischen Excentricität, ist $e_1 e_2 = e^2 r_1 r_2$,

$$r_e^2 = (e^2 - 1) r_1 r_2 = \left(1 - \frac{1}{e^2}\right) e_1 e_2; \text{ auch } e = \frac{e_1}{r_1} = \frac{e_2}{r_2}, \text{ und}$$

$r_1 - r_2 = (e_1 - e_2) : e = 2c : e = 2a$ wie oben.

Hier ist der durch die Normale halbirte Winkel der Nebenwinkel des Winkels bei P im Dreieck $C_1 P C_2$; also ist der cos. seiner Hälfte nach der Regel $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$ zu berechnen und ist also $\cos \frac{1}{2}(r_1, r_2) = \sqrt{\frac{(r_2 - r_1 + 2c)(r_1 - r_2 + 2c)}{4 r_1 r_2}} =$ $= \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{r_1 r_2}} = \frac{b}{\sqrt{r_1 r_2}}$, wenn $b^2 = c^2 - a^2$ gesetzt wird.

Die besondere Hyperbel $e^2 = 2$ ist die gleichseitige mit $e_1 e_2 = 2 r_1 r_2$, $r^2 = r_1 r_2 = \frac{1}{2} e_1 e_2$; $r_1 \sqrt{2} = e_1$, $r_2 \sqrt{2} = e_2$.

Die Normale ist das geometrische Mittel der Radien vectoren und daher dem Radius gleich, wie beim Kreise.

Die Zusammenfassung beider Fälle in den beiden confokalen Kegelschnitten durch P, P^* liefert sodann für J_1 und E_1 als die Schnitte von PJ und PE mit der Nebenaxe durch die ähnlichen Dreiecke MJJ_1, ME_1E, PJE, PE_1J_1 noch eine Fülle von Beziehungen: $ME.\,MJ = E_1M.\,MJ_1 = c^2$, $PJ.\,PJ_1 = PE,\ PE_1 = \frac{4c^2 r_1 r_2}{(r_1+r_2)^2}$, etc.

Die numerische Excentricität ist in jedem Falle die Tangente des Winkels, den die Verbindungslinie der Kegelspitzen mit deren Axen macht, für die Ellipse kleiner, für die Hyperbel grösser als Eins.

Bei dem Formulieren der im Vorigen enthaltenen Sätze halte ich mich nicht auf und bemerke nur, dass bei Steiner den Bezeichnungen r_1, r_2; i_1, i_2; r_i entsprechen a, b; a_1, b_1; d und dass die Constante $\frac{1}{e^2} - 1$ bei der Ellipse, $1 - \frac{1}{e^2}$ bei der Hyperbel durch q bezeichnet ist. Doch ist Steiners e der reciproke Werth des meinigen $e = \frac{a}{c}$ und also $e^2 - 1$ resp. $1 - e^2$ die Steiner'sche Constante in seiner Bezeichnung.

Während bei Steiner und noch mehr z. B. bei Baltzer, der ein Beispiel hierzu in seine analytische Geometrie aufgenommen hat, der Kegelschnitt als der Ort deduciert wird, der rücksichtlich seiner Normalen und zweier festen (Brenn-) Punkte die vorausgesetzte Eigenschaft $r_i^2 = i_1 i_2 q$ resp. $r_e^2 = e_1 e_2 q$ hat, gibt unsere Entwickelung sich als eine Untersuchung der Normalen der Kegelschnitte. Und sie leitet zugleich zwei zusammenhängende, wenn auch äusserlich durch den Zeitraum von fünf Jahren getrennte, grosse Abhandlungen Steiners aus einer und derselben Anschauung ab, die auch die ganze Theorie der Kegelschnitte aus Kreissystemen überhaupt mit vielem anderen umfasst.

Dabei erschien mir noch die Art und Weise von besonderem Interesse, wie sie für den Fall der Nichtrealität eines oder beider doppelt berührenden Kreise die entsprechenden modificirten Relationen liefert.

Kurz, ich hielt immer grosse Stücke auf diese Anschauung und hatte seit 1879 noch etwas Besonderes mit ihr vor, womit ich nun zu spät kommen werde; ich hatte ein wenig darauf gerechnet, dass, ebenso wie die Idee der Cyklographie mir durch so viele Jahre nicht weg genommen worden war, auch die in meinen Gedanken damit verbundene andere mir verbleiben würde, bis ich die Zeit zu vollständiger Ausführung fände. Es handelt sich um eine neue geometrische Veranschaulichung der Quaternionen in solcher Weise, dass als Speciallfall daraus die Gauss'sche Darstellung der gewöhnlichen complexen Grössen hervorgehe und zugleich die Nichtexistenz einer Zwischenstufe ersichtlich werde.

Die Quaternionen sind bekanntlich complexe Zahlen aus vier irreducibeln Einheiten, der reellen und drei imaginären, und sie wurden vor ca. 40 Jahren von W. R. Hamilton, dem Astronomen von Dublin, erdacht und für geometrische und physikalische Erörterungen von ihm und andern, wie Tait, Everett, Clifford vielfach verwandt; ihre analytisehe Berechtigung ward von Weierstrass bestritten bis Houel in Frankreich und unser Hr. College Frobenius sie nachwiesen. Ich hatte sie in einem Anhang zur Anal. Geom. d. R. nach Salmon behandelt, ehe man ihnen bei uns Interesse zuwendete, und ich habe erst in der 3. Auflage dieses Werkes, nachdem jener Nachweis vorlag und das Interesse der Mathematiker mehr auf die Quaternionen gelenkt war, diesen Anhang unterdrückt. Seitdem sind Hamilton's nachgelassene „Elements", ebenso wie auch Taits Quaternions übersetzt worden und wir haben eine Reihe kürzerer Darstellungen der Sache erhalten.

Nun hat Gauss seinerzeit die übliche geometrische Darstellung der gewöhnlichen Complexen bei Gelegenheit der Kopenhagener Preisaufgabe über die in den kleinsten Theilen ähnliche oder die conforme Abbildung der Kugel auf die Ebene, also ursprünglich auf der Kugel, entwickelt; die Darstellung in der Ebene ist eine Uebertragung durch reciproke Radien und dem dem Anfangspunkt gegenüberliegenden Punkt auf der Kugel, dem entferntesten und dem Projectionscentrum der stereographischen Projection, entspricht dabei wie man sagt — ohne dass dies darum in der Ebene zulässig wäre — der unendlich ferne Punkt,

eigentlich die ganze unendlich ferne Gerade. Nun ist nach der Methode der Cyklographie der Bildkreis eines Raumpunktes auf der Ebene wie auf der Kugel der Schnitt derselben mit einer durch ihn gehenden die Ebene resp. die Kugel orthogonal durchschneidenden Kugel. Im Hinblick auf die grosse Leichtigkeit und Evidenz, mit der in meiner Anschauung das Imaginäre veranschaulicht wird, verknüpfte ich nun damit die Idee einer geometrischen Veranschaulichung der Quaternionen durch die Kugeln des Raumes. Ist $\alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \alpha_3 i_3$ eine Quaternion, so seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ die Coordinaten des Mittelpunktes der Kugel in einem orthogonalen Coordinatensystem und α_0 ihr Radius oder der mit $\sqrt{-1}$ multiplicirte Radius. Bildet man dann die Norm N^2, so hat man $\alpha_0{}^2 + \alpha_1{}^2 + \alpha^2 + \alpha^2$, oder $-\alpha_0{}^2 + \ldots$ je nachdem, und erhält somit für constante Norm im ersten Falle die Gesammtheit der reellen Kugeln, die von einer um den Anfangspunkt mit dem Radius N beschriebenen Kugel diametral geschnitten werden, etc. Den Einfluss dieser Darstellung hier auszuführen ist nicht möglich und ich beabsichtige auch überhaupt nicht mehr, es zu thun, nachdem im letztausgegebenen Hefte der „Math. Annalen" Herr C. Stephanos wesentlich dieselbe Idee in einem Briefe an F. Klein mitgetheilt hat und die weitere Ausführung von ihm wohl zu erwarten steht. Ich erlaube mir nur die Erwähnung, dass ich meine Idee im Sommer 1879 und von da ab vielfach in Gesprächen entwickelt habe, wie mir die Herren Collegen Prof. Dr. Weilenmann, Dr. Keller und Dr. Beyel unter den Anwesenden bestätigen werden.

Separatabdruck aus der Vierteljahrsschrift der Zürch. Naturforschenden Gesellschaft, Jahrgang 1884.

Geometrische Mittheilungen

von

(Ernst) Wilh. Fiedler.

VI. Die Curven vierter Ordnung oder Classe vom Geschlecht Eins nach darstellend geometrischer Methode.

In der Versammlung vom 28. Juli 1883 habe ich unter Vorweisung und zur Erläuterung von Modellen die Darstellungen der Durchdringungscurve von Flächen zweiten Grades im Sinne der Ueberschrift besprochen, als Curven vierter Ordnung vom Geschlecht Eins oder mit zwei Doppelpunkten; und sodann speciell die einfachsten Bilder der Curve hervorgehoben, welche möglich sind, nämlich die Centralprojectionen aus den vier Punkten des gemeinsamen Quadrupels harmonischer Pole für die sich durchdringenden Flächen, welche Kegelschnitte sind; das Letztere, um eine daraus entspringende projectivische Beziehung zwischen den Kegelschnitten eines Büschels und denen der Schaar aus zweien unter ihnen auseinander zu setzen, welche sich bei Flächen zweiten Grades wiederholt. Wie die allgemeine Frage, so war auch diese specielle seit lange Gegenstand meiner Untersuchungen, mehrfach erörtert in meinem mathematischen Seminar und um jene Zeit zugleich bearbeitet in dem Manuscript für die 3. Auflage meines Buches »Die darstellende Geometrie in org. Verbindung mit der Geometrie der Lage«, Bd. II. Vergl. §§ 25 f., 46 das. Ich halte es nicht für überflüssig, hier die wesentlichen Punkte dieser Erörterung in Kürze anzugeben, die sich am vollständigsten und einfachsten dar-

stellen lassen an dem Falle der Durchdringung von zwei reellen Kegelflächen zweiten Grades.

Algebraische ebene Curven, deren Geschlecht Eins nicht übersteigt, sind ausser den Kegelschnitten und den Curven dritter Ordnung resp. Classe zunächst diejenigen Curven vierter Ordnung oder Classe, welche zwei Doppelpunkte resp. zwei Doppeltangenten besitzen. Es wird genügen, nur von den Curven 3. und 4. Ordnung zu sprechen und die dual entsprechenden Fälle unbesprochen zu lassen; aber es soll nicht übersehen werden, dass es sich in diesem Sinne eigentlich um die projicirenden Kegel der betrachteten Raumcurve handelt, deren jeder dann mit jeder beliebigen Ebene des Raumes ein Bild derselben erzeugt.

Für die Raumcurve 4. Ordnung aus zwei Flächen zweiten Grades sind nun nur die von den Ecken des gemeinsamen Quadrupels harmonischer Pole ausgehenden projicierenden Kegel Kegel zweiten Grades; alle die einfach unendlich vielen projicierenden Kegel der Curve aus Punkten in ihr selbst sind Kegel dritter Ordnung und die projicierenden Kegel aus allen übrigen reellen Punkten des Raumes — an Zahl dreifach unendlich — sind Kegel vierter Ordnung, deren Geschlecht Eins nicht übersteigt, weil jeder derselben in den beiden geraden Erzeugenden der den Punkt enthaltenden Fläche des Büschels von Flächen zweiten Grades, das durch die Curve geht, welche von jenem ausgehen, zwei Biseklanten der Curve oder zwei Doppelerzeugende besitzt; auch wenn diese nicht selbst reell sind, ist es doch immer ihre Verbindungsebene, die Tangentialebene der besagten Fläche im betrachteten Punkte.

Bezeichnet man unter μ und ν die Ordnung und Classe, durch δ und τ die Zahl der Doppelerzeugenden und resp. der Doppeltangentialebenen, sowie durch $\varkappa$ und ι die Zahlen

der stationären Erzeugenden und resp. Tangentialebenen, so sind die wesentlich verschiedenen Kegel dritter und vierter Ordnung, deren Geschlecht Eins nicht übersteigt, die von folgenden zehn Gruppen von Charakteren.

	μ	ν	δ	τ	$\varkappa$	ι
I	3	6	0	0	0	9
II	3	4	1	0	0	3
III	3	3	0	0	1	1
IV	4	8	2	8	0	12
V	4	7	1	4	1	10
VI	4	6	0	1	2	8
VII	4	6	3	4	0	6
VIII	4	5	2	2	1	4
IX	4	4	1	1	2	2
X	4	3	0	1	3	0

Unter ihnen sind die Kegel oder Curven in II, III und in VII bis X rational; die übrigen vom Geschlecht Eins.

In den Fällen der Kegel und Curven vierter Ordnung gehen aber überdies aus der möglichen Vereinigung der Doppelerzeugenden etc. untereinander oder mit Rückkehrerzeugenden etc. besondere Formen hervor, die hervorgehoben werden müssen. (Vergl. Salmon-Fiedler, »Analyt. Geom. der höheren ebenen Curven«, 2. Aufl., p. 279 f.) Der Bequemlichkeit wegen von den Spurcurven statt von den Kegeln selbst sprechend sagen wir: Wenn die singulären Punkte reell sind, so sind folgende Coincidenzen möglich:

1) Zwei Doppelpunkte, die einander unendlich nahe rücken, bilden einen Berührungsknoten, eine gewöhnliche zweipunktige Berührung von zwei Aesten der Curve;

im Falle IV bezeichnet dann $\delta = 2$ den Berührungsknoten und $\tau = 8$ die doppelt zählende Doppel-Tangente in diesem und sechs andere Doppeltangenten, während im Falle VIII ausser jener nur noch zwei andere Doppeltangenten existiren.

2) Ein Doppelpunkt und ein Rückkehrpunkt erzeugen durch ihre Vereinigung eine Schnabel- oder Knoten-Spitze, deren Tangente einmal als Doppeltangente und einmal als stationäre Tangente zählt; in den Fällen V, VIII, IX bezeichnet also diese Spitze je einen Doppel- und einen Rückkehrpunkt; im Falle V gibt es noch drei andere Doppeltangenten und neun andere Inflexionstangenten, im Falle VIII noch eine und drei resp. und im Falle IX keine andere Doppeltangente und nur noch eine stationäre Tangente.

3) Das Zusammenrücken von drei Doppelpunkten an einer Stelle von endlicher Krümmung erzeugt einen Osculationsknoten, eine Stelle der dreipunktigen Berührung oder Osculation zwischen zwei Aesten der Curve; die zugehörige Tangente zählt dreifach als Doppeltangente und es gibt daher ausser ihr nur noch eine andere Doppeltangente (VII).

4) Wenn in derselben Weise zwei Doppelpunkte und ein stationärer Punkt zu Nachbarn werden, so entsteht die Berührungsknotenspitze, ein vierpunktiger Schnitt der beiden Aeste der Curve, die sich in einer Spitze verbinden; die entsprechende Tangente zählt als Doppeltangente zweifach und es existirt daher (VIII) keine andere Doppeltangente; und sie zählt als stationäre Tangente einfach, so dass noch drei andere Inflexionen vorhanden sind.

Ueberdiess können in VII die drei Doppelpunkte als

Ecken eines unendlich kleinen Dreiecks zusammenfallen, oder ebenso in VII die zwei Doppelpunkte mit der Spitze, oder in IX die zwei Spitzen mit dem Knotenpunkt; woraus die Formen der Curve mit dreifachem Punkt hervorgehen, welche nicht hieher gehören, sondern zu den rationalen Raumcurven vierter Ordnung, die als theilweise Durchdringungen aus einer Fläche zweiter mit einer Fläche dritter Ordnung entstehen und für die daher alle geraden Mantellinien der ersten dreifach schneidende Sekanten sind.

Am a. O. p. 285 ist auch der in Curven vierter Ordnung zuerst mögliche Singularität der Undulation, d. h. der vierpunktigen Berührung mit einer Geraden gedacht; diese Tangente vertritt zwei Inflexionstangenten und eine Doppeltangente.

In dem Büschel von Flächen zweiten Grades, welches durch die Durchdringungscurve von zwei solchen Flächen geht, bilden die doppelt projicierenden Kegel die Uebergangsformen von den einfachen zu den zweifachen Hyperboloiden. Enthält dasselbe, wie bei den Eindringungen oder eintheiligen Durchdringungen, nur zwei reelle Kegel, K_1 und K_2, so bildet der eine derselben den Uebergang von einer Reihe der einfachen Hyperboloide zur Reihe der zweifachen und der andere den Uebergang von dieser wieder zu jener; enthält er der Kegel vier, wie bei den eigentlichen oder zweitheiligen Durchdringungen, so treten zwei Reihen H_{11}, H_{12} einfacher und zwei Reihen H_{21}, H_{22} zweifacher Hyperboloide im Büschel auf und wenn der erste Kegel den Uebergang bildet von der Reihe H_{11} zu der Reihe H_{21}, der zweite von H_{21} zu H_{12}, so gibt der dritte den von H_{12} zu H_{22} und der vierte den von H_{22} zu H_{11} zurück. Enthält das Büschel keine reellen Kegel, so besteht es aus lauter einfachen Hyperbo-

loiden. Im Falle von vier reellen Kegeln sind alle Ecken, Kanten und Flächen des gemeinsamen Quadrupels reell; wenn nur zwei der Kegel reell sind, so sind zwei Ecken und zwei Flächen, sowie die zwei Kanten reell, in deren einer jene liegen und in deren anderer diese sich schneiden. Im Büschel ohne reelle Kegel gibt es keine reellen Ecken und keine reellen Flächen des Quadrupels; nur ein Paar von Gegenkanten desselben bleiben reell, zwei Gerade, welche in Bezug auf alle Flächen des Büschels zu einander polar sind. Die reellen Ebenen des Quadrupels sind die Ebenen der Doppelcurven oder Selbstdurchdringungen der Tangentenfläche der Curve, Curven vierter Ordnung, welche Doppelinflexionsknoten in den Ecken des Quadrupels haben; bei nur zwei reellen Kegeln sind auch nur die beiden Doppelcurven in den ihren Spitzen gegenüberliegenden reellen Quadrupelebenen reell; und die Durchdringungscurve des nur aus einfachen Hyperboloiden bestehenden Büschels hat wie keine reellen Kegel auch keine reellen Doppelcurven. (Vergl. meine »Darstell. Geom.«, 3. Aufl. II, § 45.)

Die Lage des Centrums, von welchem aus die Durchdringungscurve projiciert wird, entscheidet nun über die Eigenschaften des projicierenden Kegels. Liegt es in der Region der einfachen Hyperboloide des Büschels, so hat der Kegel zwei reelle Doppelkanten und längs jeder derselben zwei verschiedene Tangentialebenen, nämlich die projicierenden Ebenen der Tangenten der Curve in ihren Schnittpunkten mit der betreffenden Doppelkante; während für die Lage in der Region der zweifachen Hyperboloide nur die Verbindungsebene derselben reell ist. Es findet also stets das erste statt, wenn das Büschel keine reellen Kegel enthält (IV). Im andern Falle findet durch

die Mäntel der Kegel hindurch der Uebergang aus der einen Region in die andere statt. Für die Lage des Centrums in einem beliebigen Punkte auf dem Mantel eines doppelt projicierenden Kegels rücken die beiden Doppelkanten unendlich nahe zusammen und es findet Selbstberührung des Kegels längs der entsprechenden Mantellinie statt.

Liegt das Projectionscentrum auf der Tangentenfläche der Curve (vergl. »Darstell. Geom.«, a. a. O., § 24), also in einer Tangente derselben, so ist diese selbst die eine Doppelkante; weil aber die projicierenden Ebenen der zu ihren beiden Schnittpunkten mit der Curve gehörigen Tangenten sich in der zugehörigen Tangentialebene der entwickelbaren Fläche vereinigen, so ist diese Doppelkante zur Rückkehrkante geworden und es bleibt nur eine eigentliche nothwendig reelle Doppelkante übrig (V). Vier Doppeltangentialebenen und zwei stationäre Tangentialebenen verschwinden dafür.

Mit der Lage in einer Doppelcurve der Tangentenfläche werden beide Doppelkanten des projicierenden Kegels zu Rückkehrkanten in den zugehörigen Mantellinien von jener und mit den zugehörigen Tangentialebenen als Rückkehrtangentialebenen (VI). Im Falle des Büschels ohne reelle Kegel kann auch dies nicht eintreten.

Dagegen kann in allen Fällen einer reellen Durchdringung das Projectionscentrum auf der Curve selbst genommen werden; der projicierende Kegel ist dann nur von der dritten Ordnung nach der Zahl der Schnittpunkte, die eine durch das Centrum gehende Ebene noch ausser ihm mit der Curve gemein hat; seine Classe ist um zwei und die Zahl seiner Inflexionstangentialebenen um drei vermindert, weil im Centrum zwei Tangenten der Curve und

drei Schmiegungsebenen derselben sich schneiden, die in ihm selbst berühren. Desshalb erscheinen auch keine singulären Punkte und keine Doppeltangentialebenen mehr und man erhält den Fall I.

Der auch stets mögliche Fall der Lage in einer Kante des Quadrupels hat keine in der Tafel der Charaktere erscheinende Veränderung zur Folge; ebenso die Lage in einer Quadrupelfläche, welche in jedem der Fälle mit reellen Kegeln möglich ist.

In diesem Falle kann aber das Centrum überdiess nicht nur in einer Ecke des Quadrupels speziell gewählt werden, sondern auch in einer der Mantellinien eines doppelt projicierenden Kegels, welche zugleich Tangenten der Curve sind oder auch ihrer developpablen Fläche angehören. Offenbar werden sich dann die Eigenthümlichkeiten der projicierenden Kegel vereinigt zeigen, welche beiden Fällen einzeln zukommen, also der Berührungsknoten und der Rückkehrpunkt vor Allen, so dass der Fall II entsteht.

Da die Curve acht reelle stationäre Schmiegungsebenen haben kann, und für die Lage des Centrums in einer derselben diese für zwei der durch dasselbe gehenden Schmiegungsebenen oder der Inflexionstangentialebenen des zugehörigen projicierenden Kegels zählt, so erhalten wir hier eine vierstrahlig berührende Doppelinflexionstangentialebene des Kegels oder eine Undulationskante desselben. Es ist klar, dass in den Punkten ihrer Schnittlinien zu zweien dies zweimal und in ihren Schnittpunkten zu dreien dreimal geschieht; unter diesen letzteren Punkten sind die Spitzen der doppelt projicierenden Kegel, durch welche je noch eine vierte der stationären Ebenen geht — oder im Falle der Curve vierter Ordnung mit zwei Doppel-

punkten bedingt die vierfache Undulation den Uebergang in einen doppelt zählenden Kegelschnitt oder überall Undulation. Die Lage in der Tangente der Curve, längs welcher die stationäre Ebene die Developpable berührt, macht die Undalationsstelle des Bildes zu einer Spitze zweiter Art oder Schnabelspitze. (»Darstellende Geom.« a. a. O. § 24, 2.) Für die Durchdringung ohne reelle Kegel sind auch diese Specialitäten nicht möglich.

Während nun dies Alles von der Durchdringung ohne singulären Punkt gilt, erinnern wir jetzt, dass dieselbe auch entweder selbst einen Doppelpunkt, und zwar als Knoten oder isolirt, oder einen stationären Punkt besitzen kann, der für jede Lage des Projectionscentrums ausser ihm selbst eine Doppel- resp. Rückkehrkante des projicierenden Kegels hervorruft. Es ist ersichtlich, dass die Fälle VII bis X sich hieran anschliesen. Die Curve mit Doppelpunkt wird für beliebige Lage des Centrums einen projicierenden Kegel mit drei Doppelkanten (VII) liefern, von denen stets wenigstens eine und dazu die Verbindungsebene der beiden andern reell ist. Der Lage des Centrums in der Tangentenfläche der Curve entspricht der Uebergang von einer dieser Doppelkanten in eine Rückkehrkante (VIII) und der Lage in einer Doppelcurve der Tangentenfläche (»Darstell. Geom.« a. a. O. § 25) der Uebergang beider in Rückkehrkanten, also IX. Hat die Curve aber selbst einen stationären Punkt, so erscheint sie von jedem Centrum von allgemeiner Lage aus als Curve vierter Ordnung mit einer Spitze und zwei Doppelpunkten, welche entweder selbst reell sind oder doch eine reelle Verbindungsgerade haben (VIII). Aus dem Punkte einer Tangente resp. dem Schnittpunkt von zwei nicht benachbarten Tangenten erscheint sie aber als Curve

mit zwei Spitzen und einem Doppelpunkt (IX) oder als Curve vierter Ordnung mit drei Spitzen (X). Und wieder rücken für ein Centrum im Mantel eines doppelt projicierenden Kegels die Doppelpunkte zum Berührungsknoten zusammen und es ist offenbar, dass dabei unterschieden werden muss, zwischen der Lage im Mantel des (doppelt oder dreifach zählenden) uneigentlichen, doppelt projicierenden Kegels, der den singulären Punkt der Raumcurve zur Spitze hat, und der Lage im Mantel eines der beiden eigentlich doppelt berührenden Kegel resp. des einzigen eigentlichen Kegels dieser Art. Endlich wird wieder die Lage in einer der die Durchdringung berührenden Mantellinien eines dieser Kegel den speciellsten Fall hiezu bilden.

Die Lage auf der Durchdringungscurve selbst zuletzt liefert einen projicierenden Kegel dritter Ordnung mit singulärer Kante, also dem Falle II resp. III entsprechend für eine Durchdringung mit Doppelpunkt resp. mit stationärem Punkt.

Es bleibt übrig, anzugeben, wie in der darstellend geometrischen Disposition sich die speciellen Lagen des Centrums ausprägen und es mag genügen, das für den Fall der Durchdringung aus zwei reellen Kegeln zu erläutern; denn in diesem sind alle die zur Erörterung gekommenen Lagen wirklich möglich. Die Lage in einer Quadrupelfläche resp. -Kante übergehe ich, ebenso wie die in einer stationären Ebene. Die Lage in der zugehörigen Tangente entspricht der Vereinigung der beiden folgenden Hauptfälle: Lage in der Tangentenfläche, resp. im Mantel eines doppelt projicierenden Kegels. Seien M_1 und M_2 die Mittelpunkte und L_1, L_2 die Spurkegelschnitte der Kegel, so ist das Projectionscentrum ein Punkt in der Tangentenfläche der Durchdringung, wenn eine

der vier Geraden, die den Berührungspunkt einer Umrisskante von M_1, L_1 an L_1 mit dem einer Umrisskante von M_2, L_2 an L_2 verbinden, durch den Durchstosspunkt S der Geraden M_1 M_2 in der Bildebene geht. (Vergl .a. a. O. Fig. 47 und § 26.) Der Schnitt der bezeichneten Umrisskantenprojectionen ist der stationäre Punkt des Bildes. Das Centrum liegt also in zwei nicht benachbarten Tangenten der Durchdringung, wenn der Durchstosspunkt S der Verbindungslinie der Spitzen der Schnitt von zweien der vorbezeichneten vier geraden Linien ist.

Das Centrum liegt im Mantel eines doppelt-projicierenden Kegels, wenn das Bild seiner Spitze ein Punkt seines Spurkegelschnittes ist; dieser Punkt wird zum Berührungsknoten des Bildes der Durchdringung.

Ist dies für zwei sich durchdringende Kegel der Fall, so liegt das Projectionscentrum in der Durchdringungscurve und ihr Bild wird zur allgemeinen Curve dritter Ordnung.

Die Construction des Bildes zeigt uns aber in diesem Falle zwei involutorische Strahlenbüschel aus den Scheiteln M_1' in L_1 und M_2' in L_2, welche denselben Punkt S in der Verbindungsgeraden der Scheitel zum Pol in L_1 und L_2 haben; die Strahlenpaare derselben, welche durch das Sehnenbüschel der Hilfsebenenspuren einander projectivisch zugeordnet sind, erzeugen durch ihre Schnittpunkte die Projection der Curve. Es ist die Construction der Curve dritter Ordnung aus zwei projectivischen Involutionen, deren gemeinsamer Strahl zwei entsprechenden Paaren angehört.

Wenn wir bemerken, dass eine Fläche zweiten Grades aus einem ihrer Punkte als Centrum durch die Kegelschnitte dargestellt werden kann, welche ihre ebenen Querschnitte abbilden, nämlich die Kegelschnitte der Tafel,

welche in einer gegebenen Geraden eine gegebene Involution harmonischer Pole haben, so ist es nicht schwer, die Durchdringung von zwei Flächen zweiten Grades aus einem ihrer Punkte allgemein darzustellen. (»Darstell. Geom.« a. a. O. § 41 und § 45, 30.)

Aber die wirkliche Durchführung aller im Früheren berührten Dispositionen würde zu weit führen. Ich wollte auch hier eine eingehende Untersuchung nur mehr disponiren als ausführen. Dieselbe führt zu einer Menge interessanter und nützlicher Ergebnisse.

VII. Drei gleichseitige Rotationshyperboloide desselben Büschels.

Wenn die Axe des ersten Hyperboloides die Axe z und seine Hauptebene die Ebene xy ist, während die Axen der beiden anderen in den Abständen c_3 und c_2 von z in xz und ihre Hauptebenen in den Abständen d_3, d_2 von xy liegen, so sind ihre Gleichungen

$$x^2+y^2-z^2=r_1^2,\quad (x-c_3)^2+y^2-(z-d_3)^2=r_2^2,\quad (x-c_2)^2+y^2-(z-d_2)^2=r_3^2,$$

und die Ebenen der Durchdringungen des ersten mit dem zweiten und resp. dritten sind

$$-2c_3x+c_3^2+2d_3z-d_3^2=r_2^2-r_1^2,\quad -2c_2x+c_2^2+2d_2z-d_2^2=r_3^2-r_1^2;$$

sie haben die gleiche Stellung, wenn

$$d_3 : c_3 = d_2 : c_2\,,$$

d. h. wenn die Mittelpunkte der drei Flächen in einer Geraden liegen, und die gleiche Spur in xy, wenn

$$c_2(r_1^2-r_2^2+c_3^2-d_3^2)=c_3(r_3^2-r_1^2+c_2^2-d_2^2)$$

oder

$$c_3^2d_2^2-c_2d_3^2=c_2c_3(c_2-c_3)-c_2(r_1^2-r_2^2)-c_3(r_1^2-r_3^2)$$

ist. Mit $d_1=d_2-d_3$ und $c_1=c_2-c_3$ erhält man, der Verlegung des Coordinatenanfangs in den Mittelpunkt des zweiten und resp. dritten Hyperboloides entsprechend, durch Vertauschung von 1 mit 2 und Wechsel des Zeichens bei

3 und nachher von 2 mit 3 und Wechsel des Zeichens bei 1 zwei weitere Bedingungsgleichungen. Sie genügen zur Bestimmung von d_1^2, .. und man erhält

$$d_1^2 = \frac{c_1}{c_2 c_3} S,\ d_2^2 = \frac{c_2}{c_3 c_1} S,\ d_3^2 = \frac{c_3}{c_1 c_2} S \text{ mit } S \equiv c_1 c_2 c_3 - c_1 r_1^2 + c_2 r_2^2 - c_3 r_3^2,$$

oder mit einem Wechsel des Zeichens bei c_2, sodass dann $c_1 + c_2 + c_3 = 0$ ist

$$d_i^2 = \frac{c_i}{c_j c_k} S \text{ für } S \equiv c_1 c_2 c_3 + c_1 r_1^2 + c_2 r_2^2 + c_3 r_3^2.$$

Nach diesen Bestimmungen ist die Orthogonalprojection des Durchdringungskegelschnittes in der Richtung der Flächenaxen der Kegelschnitt, welcher die Projectionen der drei Hauptkreise, d. h. irgend drei Kreise von einerlei Centrale je doppelt berührt. Die Fälle von einfachen und zweifachen Hyperboloiden, sowie von Kugeln als den sich durchdringenden Flächen sind darin eingeschlossen; die zweifachen Hyperboloide entsprechen den negativen Werthen der Radienquadrate r_1^2, r_2^2 oder r_3^2; die Kugeln dem negativen Werth der Summe S, welcher die d_i^2 negativ macht und damit den Gliedern mit $(z - d_i)^2$ in den Gleichungen das positive Zeichen giebt. (Vergl. weiterhin IX, p. 362 f.)

Man zieht aus den Bedingungen die allgemeinen Relationen

$$\frac{d_1^2}{c_1} + \frac{d_2^2}{c_2} + \frac{d_3^2}{c_3} = 0,\ \left(\frac{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}\right)^3 = \left(\frac{d_1 d_2 d_3}{c_1 c_2 c_3}\right)^2$$

$$d_1^2 d_2^2 d_3^2 = \frac{S^3}{c_1 c_2 c_3},\quad d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = S \frac{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}{c_1 c_2 c_3};$$

man erhält für $d_i^2 = c_i^2$, $d_i^2 = \frac{1}{2} c_i^2$ und $d_i^2 = 2 c_i^2$ resp. den doppelt berührenden Kegelschnitt als Parabel, gleichseitige Hyperbel und gleichseitige Ellipse respective, für verschwindende c_i, womit die d_i unbestimmt werden, als Kreis — letzteres weil concentrische Kreise einander in unendlicher Ferne doppelt berühren.

Beispielsweise sind für die Ellipse resp. Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y_2}{b_2} = 1 \quad \text{mit} \quad c^2 = a^2 \mp b^2 \quad \text{resp.}$$

die reellen Brennpunkte und der Kreis aus dem Mittelpunkte mit dem Radius b resp. ib und wieder die imaginären Brennpunkte und der Kreis aus dem Mittelpunkt mit dem Radius a ein Tripel doppelt berührender Kreise unserer Art. Man hat im ersten Falle für die Ellipse $r_1 = r_3 = 0$, $r_2 = b$, $c_3 = c = c_1$, $c_2 = -2c$, also $S = 2a^2c$ und $d_1^2 = d_3^2 = a^2$, $d_2^2 = (2a)^2$; letzteres der alte Satz von der Summe der Radien vectoren, ersteres aber der neue Satz: Die Tangente vom Ellipsenpunkt an den über der Nebenaxe als Durchmesser beschriebenen Kreis hat mit dem einen Radius vector des Punktes die grosse Halbaxe zur Summe und mit dem andern zur Differenz. Für die Hyperbel ist im ersten Falle $r_1 = r_3 = 0$, $r_2 = ib$, $c_1 = c_3 = c$, $c_2 = -2c$ und somit $S = -2ca^2$ und $d_1^2 = d_3^2 = a^2$, $d_2^2 = (2a)^2$; man hat bei der Formulierung des neuen Satzes nur zu beachten, dass der Kreis K_2 hier rein imaginär ist, so dass (vergl. IX) die orthogonal schneidenden Kreise in diametral schneidende übergehen. Im Fall der imaginären Brennpunkte hat man $c_1 = c_3 = ic$ und $c_2 = -2ic$, $r_1 = r_3 = 0$, $r_2 = a$ und daher $S = 2ic(c^2 - a^2) = \mp 2icb^2$ oder $d_1^2 = d_3^2 = \pm b^2$, $d_2^2 = \pm (2b)^2$; Relationen, welche die entsprechenden Sätze auf die imaginären Brennpunkte in der Nebenaxe oder auf einen derselben und den Kreis über der Hauptaxe als Durchmesser ausdehnen. Es sind die Fälle, wo zwei der Hyperboloide in Kegel übergegangen sind. Ist nur das Hyperboloid 3 ein Kegel, so ist $r_3 = 0$ und die Relationen $d_i^2 = \frac{c_i}{c_j c_k} S$ mit $S = c_1 c_2 c_3 + c_1 r_1^2 + c_2 r_2^2$ verbinden zwei doppelt berührende Kreise von endlichen Radien aus Punkten derselben Axe mit einem Brennpunkt in ihr.

Wenn das Polynom S den Werth Null hat, so sind die $d_i = 0$, die Hyperboloide haben die nämliche Hauptebene, ihre gemeinschaftliche Durchdringung ist eine gleichseitige Hyperbel in zur Centrale x normaler Ebene, die sich in der Potenzlinie des Büschels der Hauptkreise projiciert. Der doppelt berührende Kegelschnitt zu den drei Hauptkreisprojectionen ist die doppelt zählende Potenzlinie derselben; für das Büschel mit Grenzpunkten die ganze Potenzlinie, für das mit Grundpunkten das äussere unendlich grosse Segment derselben. Für drei Kreise eines Büschels ist somit bei $-c_2 = c_1 + c_3$

$$c_1 c_2 c_3 + c_1 r_1^2 + c_2 r_2^2 + c_3 r_3^2 = 0 \quad \text{oder}$$

$$-1 = \frac{r_1^2}{c_2 c_3} + \frac{r_2^2}{c_3 c_1} + \frac{r_3^2}{c_1 c_2}.$$

Für $r_3 = 0$ erhält man zwischen einem Grenzpunkt und zwei Kreisen des Büschels die Beziehung

$$-c_3 = \frac{r_1^2}{c_2} + \frac{r_2^2}{c_1}$$

und für $r_3 = 0$, $r_2 = 0$ zwischen beiden Grenzpunkten und einem Kreise desselben

$$-c_2 c_3 = r_1^2,$$

wonach die Grenzpunkte inverse Punkte für jeden Kreis des Büschels sind. Allgemein ergiebt sich für die Distanzen c_1, c_2, c_3 eines beliebigen Punktes von den Mittelpunkten der Kreise 1, 2, 3 des Büschels als von drei Punkten einer Geraden sofort die Relation

$$c_1 e_1^2 + c_2 e_2^2 + c_3 e_3^2 = -c_1 c_2 c_3$$

und aus ihr durch Verbindung mit

$$c_1 r_1^2 + c_2 r_2^2 + c_3 r_3^2 = -c_1 c_2 c_3$$

die Relation zwischen den Potenzen eines Punktes in Bezug auf drei Kreise desselben Büschels

$$c_1 p_1^2 + c_2 p_2^2 + c_3 p_3^2 = 0.$$

Für einen Punkt des dritten Kreises ergiebt sich daraus

$$c_1 p_1^2 + c_2 p_2^2 = 0 \quad \text{oder} \quad p_1^2 : p_2^2 = -c_2 : c_1 ,$$

die Definition und Construction eines Kreises im Büschel von zwei Kreisen als Ort der Punkte von constantem Verhältniss der bezüglichen Potenzen; etc.

Schneidet ein Kreis vom Mittelpunkte P und vom Radius r drei Kreise eines Büschels in X, Y, Z und bestimmen die Radien PX, PY, PZ auf ihnen die zweiten Schnittpunkte X', Y', Z', so liefern die Potenzen von P die Relation

$$c_1 . PX . PX' + c_2 . PY . PY' + c_3 . PZ . PZ' = 0 \quad \text{oder}$$

$$c_1 r(r + XX') + c_2 r(r + YY') + c_3 r(r + ZZ') = 0 \quad \text{d. h.}$$

$$r^2 (c_1 + c_2 + c_3) + r(c_1 XX' + c_2 YY' + c_3 ZZ') = 0, \quad \text{also}$$

$$c_1 XX' + c_2 YY' + c_3 ZZ' = 0 .$$

Für σ_1, σ_2, σ_3 als die Schnittwinkel von r mit den drei Kreisen des Büschels respective ist aber $XX' = 2r_1 \cos\sigma_1$, $YY' = 2r_2 \cos\sigma_2$, $ZZ' = 2r_3 \cos\sigma_3$ und somit auch

$$c_1 r_1 \cos\sigma_1 + c_2 r_2 \cos\sigma_2 + c_3 r_3 \cos\sigma_3 = 0 ,$$

wieder eine Formel von wichtigen Consequenzen. Für $\sigma_1 = 90^0$ und $\sigma_2 = 90^0$ giebt sie auch $\sigma_3 = 90^0$ und damit die Lehre vom conjugierten Büschel zu dem gegebenen Büschel. Für $\cos\sigma_3 = 0$

$$c_1 r_1 \cos\sigma_1 + c_2 r_2 \cos\sigma_2 = 0 \quad \text{oder} \quad c_2 : c_1 = -r \cos\sigma_1 : r_2 \cos\sigma_2 ,$$

die Bestimmung des orthogonal schneidenden Kreises im Büschel aus den unter σ_1 und σ_2 schneidenden Kreisen; insbesondere $\sigma_1 = \sigma_2$ oder $\sigma_1 = 180 - \sigma_2$ noch $c_2 : c_1 = \mp r_1 : r_2$, d. h. die gleichwinklig schneidenden zu zwei Kreisen schneiden den inneren und resp. den äusseren Potenzkreis derselben orthogonal. Mit $\cos\sigma_3 = \pm 1$ folgt ebenso

$$c_1 r_1 \cos\sigma_1 + c_2 r_2 \cos\sigma_2 \pm c_3 r_3 = 0 ,$$

die Bestimmung der Kreise eines Büschels, die einen beliebigen Kreis berühren, aus zwei Kreisen desselben, die ihn unter den Winkeln σ_1, σ_2 resp. schneiden; etc. Aber man weiss, wie alle diese Beziehungen, von denen die letzten in ähnlicher Ableitung auch sonst schon bekannt sind, völlig direct durch die Methode der Cyklographie geliefert werden.

Daher nur noch die Bemerkung, dass diese kleine Untersuchung zur Berichtigung einer augenscheinlich unrichtigen Formelgruppe bei J. Steiner (»Journal von Crelle« Bd. 45, p. 203 f., vergl. »Werke« II, p. 461 und 740) gemacht worden ist.

VIII. Ueber die developpable Fläche von 45° Gefälle durch einen Kegelschnitt und gegen seine Ebene. — Erklärung eines vorgelegten Fadenmodells der Fläche.

In meiner Mittheilung vom 17. December 1883 habe ich die zahlreichen Relationen kurz erwähnt, welche zwischen den von den Axen gebildeten Abschnitten in Tangente und Normale eines Kegelschnittes im nämlichen Punkte und den durch sie bestimmten Abschnitten in den Axen bestehen. Ist M der Mittelpunkt der Kegelschnitte von den Brennpunkten C_1 und C_2, welche sich in P orthogonal durchschneiden und sind J, J_1 resp. E, E_1 die Schnittpunkte der Normale und Tangente der Ellipse (also der Tangente und Normale der Hyperbel) mit der Haupt- und Neben-Axe der Kegelschnitte, deren Halbaxen für die Ellipse durch a, b und für die Hyperbel durch a', b' bezeichnet werden mögen, so erhält man insbesondere (vergl. die Ausführung in »Acta Mathematica« B. V, p. 331 f., speciell p. 394 f.

$$MJ = c\frac{a'}{a}, \quad EM = c\frac{a}{a'}, \quad J_1M = c\frac{b'}{b}, \quad ME_1 = c\frac{b}{b'};$$

$$PJ = \frac{b}{a}\sqrt{r_1 r_2}\,,\ EP = \frac{b'}{a'}\sqrt{r_1 r_2}\,;\ J_1P = \frac{a}{b}\sqrt{r_1 r_2},\ PE_1 = \frac{b'}{a'}\sqrt{r_1 r_2}$$

wobei noch r_1 und r_2 die Radien vectoren des Punktes P sind. Nach denselben ist die Relation der Ellipse $a^2 - b^2 = c^2$ äquivalent mit jeder der beiden Gleichungen

$$\frac{\overline{MJ}^2}{c^2} + \frac{\overline{PJ}^2}{b^2} = 1\,,\quad \frac{\overline{PJ_1}^2}{a^2} - \frac{\overline{MJ_1}^2}{c^2} = 1$$

und die Relation der Hyperbel $a'^2 + b'^2 = c'^2$ mit jeder der beiden andern

$$\frac{\overline{ME}^2}{c^2} - \frac{\overline{PE}^2}{b'^2} = 1\,,\quad \frac{\overline{PE_1}^2}{a'^2} - \frac{\overline{ME_1}^2}{c^2} = 1\,;$$

oder diese Gleichungen erhellen direct, weil sie nach den obigen Werthen und wegen $r_1 \pm r_2 = 2a$, resp. $2a'$ in Indentitäten übergehen. Da nun JP, J_1P die Radien doppelt berührender Kreise der Ellipse aus Punkten ihrer Haupt- und resp. Nebenaxe und ebenso EP, E_1P die Radien solcher doppelt berührenden Kreise der Hyperbel sind, die nach der Methode der Cyklographie durch Punkte des Raumes in den durch die Axen gehenden Normalebenen zur Tafelebene dargestellt werden, so sei M der Anfangspunkt, EJM die Axe der x und E_1MJ_1 die Axe der y eines Cartesischen rechtwinkligen Coordinatensystems, für welches die Radien der berührenden, doppelt berührenden und osculierenden Kreise des Kegelschnittes als Coordinaten z von Raumpunkten erscheinen, die die Mittelpunkte dieser Kreise zu ihren Projectionen auf die Ebene xy haben. Dann gehen die obigen Gleichungen für die Ellipse

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ und resp. für die Hyperbel $\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 1$

über in $$\frac{x^2}{c^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1\,,\ \frac{z^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2} = 1\,;$$

resp. $$\frac{x^2}{c^2} - \frac{z^2}{b'^2} = 1\,,\ \frac{z^2}{a'^2} - \frac{y^2}{c^2} = 1\,.$$

Die ersten beiden repräsentieren eine Ellipse in der Ebene xz und eine Hyperbel in der Ebene yz als räumliche Repräsentanten der die gegebene Ellipse (a, b, c) doppelt berührenden Kreise aus Punkten der Axen x und y resp.; die beiden letzten ebenso eine Hyperbel in der Ebene xz und eine Hyperbel in der Ebene yz als räumliche Repräsentanten der die gegebene Hyperbel (a', b', c) doppelt berührenden Kreise aus Punkten von x und y, d. h. in beiden Fällen aus Punkten ihrer Haupt- und Neben-Axe resp.

Denkt man alle Punkte einer Normale des Kegelschnittes und ihre räumlichen Repräsentanten in diesem Sinne, so bilden die Letzteren die zur Ebene des Kegelschnittes unter 45^0 geneigten Geraden, welche die Normale zu ihrer Orthogonalprojection und deren Fusspunkt P im Kegelschnitt zum Durchstosspunkt in $x\,y$ haben. Jede dieser Geraden kann angesehen werden als die Schnittlinie der beiden zu xy nach gleicher Seite unter 45^0 geneigten Ebenen, die durch die sich im Fusspunkt P begegnenden benachbarten Tangenten des Kegelschnittes gehen. Es sind daher die den sämmtlichen Normalen eines Kegelschnittes in dieser Art entsprechenden Geraden die Erzeugenden der entwickelbaren Fläche von dem constanten Gefälle 45^0 durch den Kegelschnitt und zu seiner Ebene; der gegebene Kegelschnitt ist selbst die eine Doppelcurve dieser Fläche und die beiden in den vorhergehenden Gleichungen repräsentierten Kegelschnitte in den Normalebenen durch seine Axen zu seiner Ebene sind die beiden andern Doppelcurven derselben im endlichen Raume. Und weil die Normalen in den beiden Endpunkten eines Durchmessers des Kegelschnittes zu je zwei Paaren paralleler Erzeugenden Anlass geben, so ist der unendlich ferne Querschnitt

des gleichseitigen Rotationskegels mit zur Tafel normaler Axe

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

die letzte Doppelcurve der entwickelbaren Fläche. (Vergl. meine Darstell. Geom. § 101 der 2. Aufl. oder Bd. II, § 47 der dritten.) Die Fläche ist die Enveloppe sämmtlicher Kegel dieser Art, die die Punkte des gegebenen Kegelschnittes zu Scheiteln haben.

Ihre Rückkehrcurve, der Ort der Schnittpunkte von je drei unendlich nahe benachbarten Ebenen oder von je zwei unendlich nahe benachbarten Erzeugenden derselben, besteht aus zwei in der Evolute des Kegelschnittes orthogonal projicierten zur Ebene xy symmetrischen Raumcurventheilen, und hat mit den Doppelcurven die nachfolgend erörterten Beziehungen.

Im Falle der Ellipse, in der die Endpunkte der Hauptaxe durch A, B und die der Nebenaxe durch C, D, die reellen Brennpunkte durch G, H und der Mittelpunkt durch M bezeichnet seien. Die Doppelellipse in der Normalebene durch die Hauptaxe d. h. in xz hat zu ihren Scheiteln in dieser die Brennpunkte G und H, und ihre Axenlänge EF in z gleich der Nebenaxe $2b$ der Ellipse. Die Doppelhyperbel in der Ebene yz hat ihre Hauptaxe JK in der Axe z der Hauptaxe der Ellipse gleich und ihre Brennpunkte liegen in der Distanz JG vom Mittelpunkte M entfernt.

Die Rückkehrcurve hat mit jeder der beiden Doppelcurven zwei Paare zu den Hauptebenen und zum Mittelpunkt symmetrisch gelegene Punkte gemein, nämlich ihre reellen stationären Punkte, die Punkte, welche den vierpunktig berührenden Osculationskreisen im Raume entsprechen. Zur Doppelellipse gehören die Punkte $y = 0$, $x = \pm \frac{c^2}{a}$, $z = \pm \frac{b^2}{a}$, welche durch die Krümmungs-

kreise in den Scheiteln der Hauptaxe cyklographisch abgebildet werden, und zur Doppelhyperbel die den Krümmungskreisen in den Scheiteln der Nebenaxe entsprechenden Punkte $x = 0$, $y = \pm \frac{c^2}{b}$, $z = \pm \frac{a^2}{b}$. In den ersteren ist die Rückkehrtangente zugleich Tangente der Doppelellipse, in den letzteren Tangente der Doppelhyperbel; beide in jenen zur Spitze zusammenlaufenden Aeste haben denselben Aufriss, und die beiden den $\pm x$ entsprechenden Aeste der Aufrisse vereinigen sich in den Aufrissen der letzteren Punkte; dagegen haben die in diesen zur Spitze zusammenlaufenden Aeste denselben Seitenriss und die beiden den $\pm y$ entsprechenden Aeste der Seitenrisse vereinigen sich in den Seitenrissen der ersten Punkte. Der gesammte Aufriss der Rückkehrcurve $+ z$ bildet mit dem Aufriss der Doppelellipse zwischen deren Grenzpunkten über E in z ein krummliniges Dreieck; ebenso der gesammte Seitenriss der Rückkehrcurve für $+ z$ mit dem Seitenriss der Doppelhyperbel zwischen ihren Grenzpunkten über J in z.

Zwischen den Grenzpunkten über die Scheitel G, H und jenseits der Grenzpunkte bis in's Unendliche sind die Doppelellipse in xz und resp. die Doppelhyperbel in yz isolierte Doppelcurven der betrachteten Fläche. In dem besonderen Falle der Ellipse $a = c\sqrt{2}$, oder $b = c$ wird die Doppelellipse zum Kreis $x^2 + z^2 = c^2$ vom Radius $c = b$ und die Doppelhyperbel in yz zu der gleichartigen $\frac{z^2}{2c^2} - \frac{y^2}{c^2} = 1$; die vorerwähnten Coordinaten der Grenzpunkte sind dann $x = \pm \frac{c}{\sqrt{2}} = z$ und resp. $y = \pm c$ $z = 2c$, wie im Allgemeinen mit c^4 als dem Product aller vier Werthe.

Sodann im Falle der Hyperbel mit den Scheiteln A, B und den Brennpunkten G, H in der Axe x. Die

Doppelhyperbel in der Ebene xz hat zu ihren Scheiteln in x die Brennpunkte G, H und ihre Potenz in der Nebenaxe z ist dieselbe wie die der Originalhyperbel in der Nebenaxe y. Die Doppelhyperbel in der Ebene yz hat ihre Scheitel in z in demselben Abstand vom Mittelpunkt wie die Originalhyperbel in x und ihre Potenz in der Nebenaxe y ist der der vorigen in x gleich und entgegengesetzt. Diese letztere ist durchaus reell doppelt, weil aus allen Punkten der Nebenaxe doppelt berührende Kreise der Hyperbel mit reellem Radius beschrieben werden; die erstere ist reell doppelt in ihrer ganzen unendlichen Erstreckung ausserhalb eines je den einen und den anderen Scheitel umfassenden Bogens, dessen Endpunkte die reellen Rückkehrpunkte der Rückkehrcurve sind, mit $y=0$, $x=\pm\frac{c^2}{a'}$, $z=\pm\frac{b'^2}{a'}$, welche den Osculationskreisen in den Scheiteln entsprechen.

Mit $c^2=2a'^2$ oder $b'^2=a'^2=\frac{c^2}{2}$ d. h. der gleichseitigen Hyperbel werden die Doppelhyperbeln ausgedrückt durch

$$\frac{x^2}{c^2}-\frac{2z^2}{c^2}=1\,,\ \frac{2z^2}{c^2}-\frac{y^2}{c^2}=1$$

und die Coordinaten der Rückkehrpunkte durch $2a'$, a' resp. $c\sqrt{2}$ und $\frac{c}{\sqrt{2}}$.

Der Fall der Parabel ist von dem Falle der Hyperbel aus leicht zu übersehen, indem man sich den einen Ast derselben und damit ihrer Evolute, sowie der zugehörigen Doppelcurve in xz mit der ganzen Doppelcurve in yz unendlich entfernt denkt.

Im Falle des Kreises vereinigen sich die ganze Rückkehrcurve mit den reellen Theilen der Doppelcurven in den beiden Punkten des Raumes, deren cyklographisches Bild der Kreis ist, die developpable Fläche ist zum Doppel-

kegel geworden. Den Fall des Linienpaares $b'^2x^2=a'^2y^2$ wollen wir nur erwähnen.

Unsere developpable Fläche veranschaulicht die Gesammtheit der berührenden Kreise und der Normalen des betrachteten Kegelschnittes. Für irgend einen Punkt in seiner Ebene giebt die durch ihn gehende Parallele zur Axe z mittelst ihrer Schnitte mit der Developpabeln die Radien der um jenen zu beschreibenden Berührungskreise des Kegelschnittes und in den nach den Berührungspunkten gehenden Radien oder den Projectionen der zugehörigen Mantellinien der Developpabeln die von ihm ausgehenden vier Normalen und Tangenten der Evolute.

Die Projection des Querschnittes der Fläche mit einer Ebene von der Spur s und der Neigung α zur Ebene des Kegelschnittes ist der Ort der Centra derjenigen den Kegelschnitt berührenden Kreise, die s zur gemeinsamen Aehnlichkeitsaxe und cotan α zum Modul haben; unter ihnen sind als Projectionen der Schnittpunkte der Ebene mit den Doppelcurven in xz resp. yz die doppelt berührenden und als die ihrer Schnittpunkte mit der Rückkehrcurve die osculierenden Kreise des bezeichneten Systems.

Denken wir einen Punkt der Kegelschnittebene als Mittelpunkt eines gleichseitigen Rotationskegels mit zu ihr normaler Axe, so erhalten wir in der Projection seiner Durchdringung mit der developpablen Fläche den Ort der Mittelpunkte berührender Kreise des Kegelschnittes, die durch jenen Punkt gehen; durch die Schnitte der Doppelcurven und resp. der Rückkehrcurve derselben mit dem Kegel insbesondere die doppelt berührenden und die osculierenden Kreise in jenem System.

So erhalten wir für einen Kreis in der Kegelschnittebene das System der ihn und den Kegelschnitt berüh-

renden Kreise aus der Durchdringung des über ihm stehenden gleichseitigen Rotationskegels mit der Fläche; ferner die Systeme der Berührungskreise des Kegelsschnittes, die den gegebenen Kreis orthogonal oder unter vorgeschriebenen reellen Winkeln σ schneiden, aus der Durchdringung der developpablen Fläche mit dem gleichseitigen einfachen Rotationshyperboloid, welches den Kreis R selbst oder den von ihm um die Distanz $R \cos \sigma$ entfernten vom Radius $R \sin \sigma$ zum Kehlkreis hat; und endlich analog durch zweifache gleichseitige Rotationshyperboloide die Systeme der Berührungskreise des Kegelschnittes, welche den gegebenen Kreis diametral oder unter einem durch seinen Cosinuswerth gegebenen nicht reellen Winkel schneiden — in welch' letzterem Falle der gegebene Kreis auch selbst rein imaginär sein kann.

Denken wir zu dem ersten Kegelschnitt in der Ebene xy einen zweiten und bilden für beide die Flächen gleichen Fallens von 45^0 F_1 und F_2 mit den Rückkehrcurven R_1 und R_2 und den Doppelcurven D_{11}, D_{12} und D_{21}, D_{22} der ersten und zweiten, so lässt sich die Durchdringungscurve C_{12} beider Flächen F_1, F_2 darstellen und liefert den Ort der Centra von Kreisen, welche beide Kegelschnitte zugleich berühren — wenn man will die äquidistante Symmetrie- oder die Halbierungscurve zwischen beiden, während die Projectionen der Doppelcurven die Symmetrielinien etc. der Originalkegelschnitte selbst sind. In jenem Orte sind die den Doppelcurven D_{11}, D_{12} angehörigen Punkte die Centra von Kreisen, die den ersten Kegelschnitt doppelt und den zweiten einfach berühren, und die Punkte aus der Rückkehrcurve R_1 die Centra der Osculationskreise des ersten Kegelschnittes, die den zweiten berühren; etc.

Endlich liefern für drei Kegelschnitte derselben

Ebene die zugehörigen Developpablen F_1, F_2, F_3 durch ihre Schnittpunkte die Centra der Kreise, welche jene Kegelschnitte zugleich berühren oder die von ihnen gleichentfernten Punkte.

Man sieht, dass für Kegelschnitte die Uebertragung des Problems in den Raum von drei Dimensionen eine wesentliche Vervollständigung seiner Lösungen herbeiführt.

Damit ist die Frage der Uebertragung unserer Behandlung auf beliebige ebene Curven natürlich gestellt und wir widmen ihr folgende kurze Erörterung. Die Bildung der Developpablen ist offenbar; sie ist die Enveloppe aller der gleichseitigen Rotationskegel mit zur Ebene normaler Axe, die ihre Mittelpunkte in der Curve haben, und damit auch die aller der unter 45^0 zu ihrer Ebene geneigten Ebenen, welche durch die Tangenten der Curve gehen; sie ist die gemeinsame Developpable der Curve und des gemeinsamen Fluchtkreises dieser Kegel oder ihres unendlich fernen Querschnittes. Die Projection ihrer Rückkehrcurve ist die Evolute der gegebenen Curve und die Projection ihrer Doppelcurve die Symmetrieaxe oder Halbierungscurve derselben; etc. Unsere Developpablen für zwei Curven in derselben Ebene liefern die äquidistante oder Symmetrie-Curve derselben und die für drei Curven die äquidistanten Punkte, etc.

Sind μ und ν die Ordnungs- und Classen-Zahl der Curve und $\varkappa$ die Zahl ihrer stationären oder Rückkehrpunkte, so lässt sich leicht zeigen, dass die developpable Fläche, welche sie mit einem Kegelschnitte in beliebiger Ebene bestimmt, von der Classe $n = 2\nu$ ist oder dass von einem Punkte aus 2ν Tangentialebenen an sie gehen; ferner von der Ordnung $r = 2(\mu + \nu)$ oder dass eine gerade Linie ihr in so viel Punkten begegnet; während ihre Rück-

kehrcurve von der Ordnung $m = 2\varkappa + 6\nu$ ist. Diese Charakterzahlen sind für einen Kegelschnitt wegen $\mu = \nu = 2$, $\varkappa = 0$ speciell $n = 4$, $r = 8$, $m = 12$. Die Evolute ist daher von der Classe $\frac{1}{2} r$ und von der Ordnung $\frac{1}{2} m$ als eine Doppelprojection der Rückkehrcurve.

Dass die Evolute einer algebraischen Curve von der Ordnung μ und der Classe ν mit $\varkappa$ stationären Punkten oder ι stationären Tangenten von der Ordnung $3\nu + \varkappa = 3\mu + \iota$ und von der Classe $\mu + \nu$ ist, sind aber wohlbekannte Ergebnisse der Curventheorie.

Man erhält aber aus jenen Charakteren auch die Ordnungszahl x der gesammten Doppelcurve der Developpablen, von der dann die Ordnungszahl ν für den Kegelschnitt, weil er νfach wird in derselben, und μ für die Curve selbst, weil sie doppelt ist, abgezogen werden müssen, um die Ordnungszahl derjenigen Doppelcurve zu erhalten, die durch ihre Projection die Symmetriecurve der gegebenen liefert; man erhält die Zahl der stationären Punkte ihrer Rückkehrcurve etc. (Vergl. meine »Darstell. Geometrie«, 3. Aufl., II, §§ 22 f.)

Die Developpable gleichen Fallens von 45° durch die Kreisevolvente ist die Tangentenfläche der Schraubenlinie vom nämlichen Anfangspunkt und Drehungssinn, die den Grundkreis der Evolvente zu ihrer Orthogonalprojection und die Neigung 45° hat. Desshalb ist der Grundkreis die Evolute der Evolvente. Und weil der aufsteigende Gang der Schraubenlinie die eine und der absteigende Gang die andere Evolvente des Grundkreises vom nämlichen Anfangspunkt zur Spur hat, und die mit dem Grundkreis concentrischen Kreise durch die im Durchmesser des Anfangspunktes abwechselnd dies- und jenseits sich folgenden Schnittpunkte beider Evolventen die Projectionen der aufeinander folgenden Doppelcurven jener Schraubenfläche

sind, so sind sie die Symmetriecurven beider Evolventen. (Vergl. meine »Darstell. Geometrie«, 3. Aufl., II, §§ 13 f.) Für zwei verschiedene Kreis-Evolventen derselben Ebene ist die Projection der Durchdringung ihrer Developpablen vom Gefälle 45° die Symmetriecurve, etc.

Die Verbindung einer ebenen Curve mit einem beliebigen Kegelschnitt in anderer Ebene entspricht der collinearen Umformung des Problems von der Developpablen gleichen Fallens von 45°; die Doppelprojection der Rückkehr- und Doppel-Curven erfolgt dann aus dem Pol der Schnittlinie beider Ebenen in Bezug auf den Kegelschnitt auf die Ebene der Curve, und an die Stelle der Bildkreise treten Kegelschnitte, für die der Fusspunkt des projicirenden Strahles der Pol jener Geraden ist und die in ihr dieselbe Involution harmonischer Pole mit dem gegebenen Kegelschnitt bestimmen, überdiess aber die Curve berühren.

Die Doppelprojection der Rückkehrcurve ist die Quasi-Evolute der gegebenen Curve. (Vergl. Salmon-Fiedler, »Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven«, 2. Aufl., §§ 106 f.)

Ginge man aber zur Geometrie von vier Dimensionen vor, so würde man in analoger vervollständigter Weise eine Theorie der berührenden Kugeln und der Normalen einer algebraischen Oberfläche erhalten. (Man vergleiche meine Abhandlung »Zur Gesch. und Theorie der elem. Abbildungsmethoden« in Bd. XXVII dieser Vierteljahrsschrift, p. 174 f.)

Aber ich will hier nur den Uebergang zum Imaginären besprechen, der in der Natur der Sache liegt und zu einer weiteren Ergänzung der vorigen Resultate führt.

IX. Cyklographische Uebergänge vom Reellen zum Rein-Imaginären.

Wenn $2c$ die Centraldistanz zweier Kreise in der Ebene x, y ist, von den Radien R (um den Coordinatenanfangspunkt) und r (um x, y), so drücken die Relationen

$$(2c)^2 = R^2 + r^2,\quad (2c)^2 + R^2 = r^2,\quad (2c)^2 + r^2 = R^2,$$

von denen die zweite und dritte durch den Zeichenwechsel von R^2 resp. r^2 oder die Ueberführung von R, r in iR resp. ir aus der ersten hervorgehen, den orthogonalen Schnitt beider Kreise, resp. den diametralen von R durch r und von r durch R aus; und cyklographisch, mit Auftragung der r als z, d. h. als Perpendikel zur Ebene xy in den Punkten x, y sind die Flächen

$$x^2 + y^2 = R^2 + z^2,\quad x^2 + y^2 + R^2 = z^2,\quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

die Repräsentanten der durch den festen Kreis R und jene resp. Bedingungen gegebenen Kreissysteme: Das einfache gleichseitige Rotationshyperboloid mit R als Kehlkreis; das zweifache gleichseitige Rotationshyperboloid mit R als Bildkreis der Scheitel, und die Kugel mit R als Hauptkreis; beide ersten mit $x^2+y^2-z^2=0$ als Asymptotenkegel, an dessen Stelle bei der Kugel der Nullkugel-Kegel $x^2+y^2+z^2=0$ tritt. Die Enveloppe solcher reeller gleichseitiger Rotationskegel $x^2+y^2-z^2=0$ aus den Punkten des betrachteten Kegelschnittes war die Developpable vom Fallen 45° in der vorigen Betrachtung, als deren im Endlichen gelegene Doppelcurven sich mittelst der Normalenrelationen des Grund-Kegelschnittes

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$$

die Kegelschnitte in xz, yz resp.

$$\frac{x^2}{c^2} \pm \frac{z^2}{b^2} = 1,\quad \frac{z^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2} = 1$$

ergaben. Setzen wir an Stelle von $+z^2$ überall $-z^2$ oder

iz für z, so erhalten wir die Gleichungen der Doppelcurven der imaginären Enveloppe der Nullkugel-Kegel aus den Punkten jenes Grund-Kegelschnittes oder die seiner Focalcurven in der Form

$$\frac{x^2}{c^2}-\frac{z^2}{b^2}=1, \quad -\frac{z^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2}=1$$

für die Ellipse und in der anderen

$$\frac{x^2}{c^2}+\frac{z^2}{b^2}=1, \quad -\frac{z^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2}=1$$

für die Hyperbel; eine Hyperbel in der Symmetrieebene durch die Hauptaxe, die die Brennpunkte der Ellipse zu ihren Scheiteln und die Scheitel derselben zu ihren Brennpunkten hat, und eine imaginäre Ellipse in der Symmetrieebene durch die Nebenaxe, im ersten Falle; und eine Ellipse in jener von der gleichen Lagenrelation, mit einer imaginären in dieser im letzteren Falle.

Für die besonderen Fälle der Ellipse $a=c\sqrt{2}$ werden die Focalhyperbel gleichseitig und die Ellipse von derselben Specialität

$$\frac{x^2}{c^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \quad -\frac{z^2}{2c^2}-\frac{y^2}{c^2}=1,$$

und für die gleichseitige Hyperbel $c=a\sqrt{2}$ die Focalellipsen, die reelle wie die imaginäre, zu speciellen

$$\frac{x^2}{c^2}+\frac{2z^2}{c^2}=1, \quad -\frac{2z^2}{c^2}-\frac{y^2}{c^2}=1.$$

Man sieht auch leicht, dass man von der Focalhyperbel $\frac{x^2}{c^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$ und resp. von der Focalellipse $\frac{x^2}{c^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$ wieder zur ursprünglichenEllipse und Hyperbel als der zugehörigen reellen Focalcurve gelangt, oder dass die Beziehung gegenseitig ist. Die beiden reellen Doppelcurven sind das einzig Reelle der developpablen Fläche. Natürlich ist dies auch für jede beliebige ebene Curve der Fall, und die auf die Doppelcurven und ihre Projection

speciell gerichtete Untersuchung der Focal-Developpablen im Sinne der vorigen Mittheilung liefert entsprechende Resultate.

Die Ordinaten der reellen Focalcurve liefern die reellen Factoren für die Radien der rein imaginären Kreise aus ihren Fusspunkten, welche den gegebenen Kegelschnitt doppelt berühren; die Brennpunkte desselben sind die Kreise dieser Art vom Radius Null, wie bekannt, und durch sie schliessen sich jene an die reellen Kreise aus Punkten der Hauptaxe an, welche den Kegelschnitt imaginär doppelt berühren. Focalkegelschnitt und Doppelkegelschnitt der Developpablen von 45° Gefälle in der Hauptaxensymmetrieebene schliessen sich in den reellen Brennpunkten berührend nach verticalen Tangenten aneinander. Man sieht, dass die Lehre von den doppelt berührenden Kreisen der Kegelschnitte erst durch die Berücksichtigung der Focalcurven ganz vollständig wird, insofern man verlangt, dass die Radien aller, der reellen und der rein imaginären doppelt berührenden Kreise durch reelle Strecken bestimmt werden sollen.

Aber ich will noch von einigen verwandten Uebergängen aus dem Reellen in das Imaginäre kurz berichten, zu denen die Untersuchungsweise der Cyklographie Anlass giebt und von denen in meinem gleichnamigen Buche (Leipzig, 1882) nicht gehandelt ist. (Vergl. daselbst p. 105 f., p. 138 f.). Der Wechsel des Zeichens von z^2, der das einfache gleichseitige Rotations-Hyperboloid vom Kehlkreis R in die reelle Kugel mit demselben als Hauptkreis überführt, verwandelt zugleich das zweifache Hyperboloid mit dem Bildkreis der Scheitel R oder $x^2+y^2-z^2=-R^2$ in die rein imaginäre Kugel $x^2+y^2+z^2=-R^2$, die zum Kreise R als Symmetriekreis des Hauptkreises gehört.

Man betrachte nun wie in der Mittheilung vom 17. Dec.

1883 die Durchdringungskegelschnitte des centrischen einfachen oder zweifachen Hyperboloides

$$(x+c)^2+y^2-z^2=\pm r_1{}^2$$

mit dem excentrischen

$$(x-c)^2+y^2-(z+d)^2=\pm r_2{}^2$$

für veränderliche Distanz d der Kehlkreisebenen, so theilen sich die Projectionen derselben, die die Hauptkreisprojectionen doppelt berührenden Kegelschnitte, bekanntlich in Hyperbeln und Ellipsen durch die der Distanz $d=2c$ entspringende Parabel; und die wichtigsten Unterabtheilungen der einen oder andern Gruppe werden durch die Distanzen d bestimmt, welche den Längen der gemeinsamen Tangenten der Grundkreise gleich sind, oder durch diese Tangentenpaare selbst als Degenerationsformen unter den Kegelschnitten des Systems. Für reelle und aussereinanderliegende Grundkreise sind diese Längen t_i, t_e reell und die betreffenden Durchdringungen solche von einfachen Hyperboloiden; für reelle und sich schneidende Grundkreise entspricht der Distanz t_e (Länge der äusseren gemeinsamen Tangenten) die berührende Hyperboloid-Durchdringung, der Distanz t_i aber, welche rein imaginär ist, nach dem gleichzeitigen Uebergange der $+z^2$ in $-z^2$, die berührende Kugeldurchdringung

$$(x+c)^2+y^2+z^2=r_1{}^2,\quad (x-c)^2+y^2+(z+d)^2=r_2{}^2,$$

welche den innern Aehnlichkeitspunkt abbildet. Umschliesst der Kreis r_1 den Kreis r_2, so sind sowohl die inneren als die äusseren gemeinsamen Tangenten von imaginären Längen und es entsprechen den bezüglichen Distanzen die berührenden Kugeldurchdringungen, welche die Aehnlichkeitspunkte abbilden.

Man hat bekanntlich bei der Centraldistanz $2c$ und den Radien r_1, r_2 im Falle des Aussereinanderliegens

$$t_i{}^2=(2c)^2-(r_1+r_2)^2,\quad t_e{}^2=(2c)^2-(r_1-r_2)^2;$$

und erhält daher im Falle des Schneidens wegen $r_1+r_2>2c$

$$t_i^2 = -\{(r_1+r_2)^2-(2c)^2\}$$

und im Falle der Umschliessung, wo gleichzeitig $r_1+r_2>2c$ und auch $r_1-r_2>2c$ ist, auch noch

$$t_e^2 = -\{(r_1-r_2)^2-(2c)^2\}.$$

Man sieht hieraus ferner, dass für den einen der Grundkreise als rein imaginär oder das eine der Hyperboloide als zweifach diese Distanzen complex werden, so dass die einfache räumliche Interpretation von vorher zu gelten aufhört; endlich aber, dass für beide Kreise als rein imaginär die Werthe übergehen in

$$t_i^2 = (2c)^2+(r_1+r_2)^2,\quad t_e^2=(2c)^2+(r_1-r_2)^2,$$

so dass die Längen der gemeinsamen Tangenten gerade dann stets reell sind. Während sie im Falle der reellen aussereinanderliegenden Kreise die Radiensummen der sie orthogonal schneidenden Kreise aus den Aehnlichkeitspunkten J und resp. E sind, werden sie für die rein imaginären Kreise die Summen der Radien der dieselben diametral schneidenden Kreise aus denselben Aehnlichkeitspunkten; und während in jenem Falle $2c>t_e>t_i$ ist, wird in diesem $2c<t_e<t_i$. Es muss dazu bemerkt werden, dass die Aehnlichkeitspunkte von zwei rein imaginären Kreisen derselben Ebene identisch sind mit denen ihrer reellen Symmetriekreise. Man hat für die reellen Kreise die Abstände ihrer Aehnlichkeitspunkte J und E von der Mitte der Centrale respective

$$c\frac{r_1-r_2}{r_1+r_2},\quad c\frac{r_1+r_2}{r_1-r_2}$$

und sieht, dass beide durch die Ersetzung von r_1, r_2 durch ir_1, ir_2 nicht geändert werden. Ebenso bleiben die Abscisse ihres Mittelpunktes und die Hälfte ihres gegenseitigen Abstandes und somit der Aehnlichkeitskreis unver-

ändert bei diesem Uebergang, weil jene Längen ausgedrückt wurden durch

$$c\frac{r_1^2 + r_2^2}{r_1^2 - r_2^2} \text{ und } \frac{2cr_1r_2}{r_1^2 - r_2^2} \text{ resp.}$$

Weil aber der letzte wie die vorigen Ausdrücke complex wird, wenn nur einer der betrachteten Kreise imaginär ist, so erhellt, dass ein reeller Kreis mit einem rein imaginären Kreis derselben Ebene wie keine reellen Längen gemeinsamer Tangenten, so auch keine reellen Aehnlichkeitspunkte und keinen reellen Aehnlichkeitskreis hat.

Man hat also insbesondere für reelle Grundkreise, wenn sie einander schneiden, für $d=0$ den äusseren Theil ihrer Potenzlinie als doppelt berührenden Kegelschnitt; und aus ihr sich entfaltend für reell wachsende d Hyperbeln mit der Nebenaxe in der Centrale bis zu den äusseren gemeinsamen Tangenten für $d = t_e$; sodann für bis $d = 2c$ wachsende Distanzen-Hyperbeln mit der Hauptaxe in der Centrale bis zur Parabel und weiterhin umschliessende Ellipsen. Der Bewegung der Distanz ins rein imaginäre Gebiet von $d=0$ bis $d = t_i = i\sqrt{(r_1+r_2)^2-(2c)^2}$ entsprechen die sich als Ellipsen im Kreisbogenzweieck projicierenden Kugeldurchdringungen, vom innerhalb liegenden Theil der Potenzlinie ab bis zum inneren Aehnlichkeitspunkt, für den sich der Satz ergiebt, dass die Summe der kleinsten durch ihn gehenden Halbsehnen grösser ist als für jeden andern Punkt.

Und man hat für reelle Grundkreise, deren einer den andern umschliesst, für $d=0$ die Potenzlinie und für von da aus wachsende reelle Distanzen die sich aus ihr entfaltenden Hyperbeln mit der Centrale als Hauptaxe bis zur Parabel für $d = 2c$ und den für grössere reelle Distanzen entspringenden umschliessenden Ellipsen. Nun gehören aber beide begrenzenden Degenerationsformen dem

Gebiet der elliptischen Durchdringungsprojectionen aus rein imaginären Distanzen an. Die Potenzlinie erscheint für $d = 0$ als Anfang der rein imaginären Werthereihe als Projection eines imaginären Kreises; mit der Distanz $d = \sqrt{(r_1 - r_2)^2 - (2c)^2} = it_e$ beginnen mit dem äusseren Aehnlichkeitspunkt der Kreise die reellen elliptischen Durchdringungsprojectionen; für ihn ist daher die Differenz der zugehörigen kleinsten Halbsehnen ein Minimum. Und mit der Distanz $d = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - (2c)^2} = it_i$ oder im inneren Aehnlichkeitspunkt, für den die Summe der kleinsten Halbsehnen ein Maximum ist, endigen sie. Jener entspringt der umschliessenden, dieser der ausschliessenden Berührung der Kugeln, wie man denn aus dieser Lage sofort die angegebenen Werthe der Distanzen wieder erhält.

Die vom einen oder anderen der gegebenen Kreise in einem Scheitel vierpunktig berührten Kegelschnitte, welche den Distanzen $d = b_1$, $d = a_2$, $d = b_2$, $d = a_1$ entsprechen für $b_1^2 = (2c - r_1)^2 - r_2^2$, $a_2^2 = (2c - r_2)^2 - r_1^2$, $b_2^2 = (2c + r_2)^2 - r_1^2$, $a_1^2 = (2c + r_1)^2 - r_2^2$ werden sämmtlich imaginär, sobald beide Kreise es sind; und für rein imaginäres r_1 resp. r_2 bleiben nur a_2^2, b_2^2 resp. b_1^2, a_1^2 oder zwei der bezüglichen Kegelschnitte reell. Für reelle Kreise, die ausser einander liegen, sind alle vier Distanzen reell und alle bezüglichen Kegelschnitte entspringen aus hyperboloidischen Durchdringungen; schneiden sich die Kreise, so dass A_2 im Innern des ersten und B_1 im Innern des zweiten liegt, so werden a_2^2 und b_1^2 negativ und die zugehörigen in A_2 von r_2 resp. in B_1 von r_1 vierpunktig berührten Kegelschnitte entspringen aus Kugeldurchdringungen; wird endlich der Kreis r_2 von r_1 umschlossen, so werden a_2^2, b_1^2 negativ und es entsprechen ihnen Ellipsen, welche aus Kugeldurchdringungen hervorgehen.

Notizen.

Ueber die Kummer'sche Darstellung der Strahlensysteme zweiter Ordnung. — In seiner Abhandlung über die algebraischen Strahlensysteme der ersten und zweiten Ordnung*) ertheilt Kummer der Raumgeraden die gemischten Coordinaten $t:x:y:z$, $\xi:\eta:\zeta$. Hierbei sind $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$, $\frac{z}{t}$ die Coordinaten eines Punktes auf der Geraden, bezogen auf ein orthogonales System, $\xi:\eta:\zeta$ sind zu betrachten als $x:y:z$ für den in der (unendlich fernen) Ebene $t=0$ gelegenen Punkt der Geraden, zugleich sind ξ, η, ζ proportional den Richtungscosinussen. Endlich sind $\frac{x+\varrho\xi}{t}$, $\frac{y+\varrho\eta}{t}$, $\frac{z+\varrho\zeta}{t}$, unter ϱ einen willkürlichen Parameter verstanden, stets die orthogonalen Coordinaten eines Punktes auf der Geraden.

Das Strahlensystem (zweiter Ordnung) wird durch zwei Gleichungen dargestellt. Die erste hat die Form $P\xi+Q\eta+R\zeta=0$, in welcher P, Q, R homogene Functionen in t, x, y, z sind; sie liefert für jeden Punkt $t:x:y:z$ des Raumes eine durch ihn gehende Ebene, liniengeometrisch also zu jedem Punkt einen Büschel, dessen Mittelpunkt jener Punkt ist. Bewegt sich der Punkt auf einem zugehörigen Büschelstrahl weiter, so dreht sich die Ebene des Büschels keineswegs um diesen Strahl, und es folgt, dass die ∞^3 Büschel, welche diese erste Gleichung für alle Punkte des Raumes liefert, alle ∞^4 Raumgeraden enthalten. Es ist somit die erste Gleichung des Systems nicht die Gleichung eines Complexes. Wenn man dagegen ∞^2 der genannten Büschel zusammenfasst, etwa dadurch, dass man den Punkt $t:x:y:z$ eine willkürliche Fläche durchlaufen lässt, so erhält man allemal einen Complex, in welchem das Strahlensystem enthalten ist; der Complex ist von der gewählten Fläche abhängig.

---

*) Abh. d. Berl. Akad. 1866.

Hiervon durchaus verschieden verhält es sich mit der zweiten (abgeleiteten) Gleichung des Systems. Dieselbe ändert sich nämlich nicht, wenn man an Stelle von t, x, y, z setzt $t, x+\varrho\xi, y+\varrho\eta, z+\varrho\zeta$; diese Gleichung stellt einen Strahlencomplex dar.

Die Aufgabe, beide Gleichungen des Systems durch die Gleichungen zweier Complexe zu ersetzen, welche das System enthalten, ist insofern eine unbestimmte, als die erste Gleichung auf unendlich viele solcher Complexe führt, je nach Wahl der Fläche, auf welcher alle Ausgangspunkte t, x, y, z der Strahlen liegen sollen. Als solche Fläche kann man z. B. eine Coordinatenebene, etwa $x=0$, annehmen. Alsdann erhält man aus beiden Gleichungen des Systems die Gleichungen zweier Complexe durch folgendes Verfahren. Man substituire in die Kummer'schen Gleichungen

$$t:x:y:z=p_{12}:o:p_{32}:p_{42}, \qquad \xi:\eta:\zeta=p_{12}:p_{13}:p_{14},$$
$$u:v:w=p_{34}:p_{42}:p_{23}$$

so gehen sie über in die zweier Complexe, welche das System im Allgemeinen als unvollständigen Schnitt enthalten.

Die Gerade $t:x:y:z$, $\xi:\eta:\zeta$ kann nämlich betrachtet werden als die Verbindungslinie der Punkte mit den Coordinaten

$$\begin{array}{llll} t, & x\;, & y\;, & z \\ t, & x+\varrho\xi, & y+\varrho\eta, & z+\varrho\zeta, \end{array}$$

hat also die sechs Coordinaten

(1) $\lambda p_{12}=t\varrho\xi \qquad , \lambda p_{13}=t\varrho\eta \qquad , \lambda p_{14}=t\varrho\zeta$

(2) $\lambda p_{34}=\varrho(y\zeta-z\eta), \lambda p_{42}=\varrho(z\xi-x\zeta), \lambda p_{23}=\varrho(x\eta-y\xi)$,

unter λ einen Proportionalitätsfactor verstanden. — (1) zeigt, dass $\xi:\eta:\zeta=p_{12}:p_{13}:p_{14}$. Wählt man den Ausgangspunkt in $x=0$, so ergeben die Gleichungen (2)

$$\lambda p_{34}=y\varrho\zeta-z\varrho\eta, \qquad \lambda p_{42}=z\varrho\xi, \qquad \lambda p_{23}=-y\varrho\xi,$$

und hieraus folgt mit Hülfe von (1)

(3) $\qquad tp_{34}=yp_{14}-zp_{13}, \quad tp_{42}=zp_{12}, \quad tp_{23}=-yp_{12}.$

Aus (3) folgt für die metrischen Coordinaten des Anfangspunktes der Geraden: $\frac{y}{t}=-\frac{p_{23}}{p_{12}}=\frac{p_{32}}{p_{12}}, \ \frac{z}{t}=\frac{p_{42}}{p_{12}}$ und die erste Gleichung ergiebt die bekannte Identität, welche zwischen den sechs Coordinaten p_{ik} besteht.

Für die Strahlensysteme zweiter bis sechster Classe 1. Art geht nun die abgeleitete Gleichung über in die eines Reye'schen Complexes, dessen Ausnahmepunkte die Ecken des Coordinatentetraeders sind.*)

Das System zweiter Classe ergiebt sich als Schnitt des Reye'schen Complexes mit einem linearen.

Ebenso findet man, dass durch das System dritter Classe sich ein Büschel quadratischer Complexe legen lässt. Dieser Büschel enthält, wie bekannt, 10 Reye'sche Complexe und die Congruenz ist z. B. der Schnitt von zwei Reye'schen Complexen (mit unabhängigen absoluten Invarianten), welche einen Ausnahmepunkt und eine lineare Congruenz gemein haben. — Die Construction, welche Herr Stahl für das System dritter Ordnung zweiter Classe gegeben hat**), deckt sich denn auch mit der Construction des Schnittes zweier Reye'schen Complexe, welche eine Ausnahmeebene und eine lineare Congruenz gemein haben. Nach der Bezeichnung des Herrn Stahl ist (01) die Ausnahmeebene, die Directricen der gemeinsamen Congruenz sind $\overline{AB} = \overline{\alpha\beta}$ und $\overline{A_1B_1} = s_1$. Die Strahlen des einen Complexes gehen von den Punkten S_1 der Ebene (01) nach den Strahlen des Büschels $A\alpha$ (welche die entsprechenden Geraden l_0 schneiden); dieser Complex hat das Ausnahmetetraeder AA_1OP. Für den anderen Complex tritt gegenüber vorhin der Büschel $B\beta$ an Stelle von $A\alpha$, das Ausnahmetetraeder ist BB_1MN.

Auf die Kummer'sche Darstellung der übrigen Systeme trete ich hier nicht näher ein.

(Im Februar 1885.) Dr. A. Weiler.

---

*) Bezüglich dieser Complexe vgl. die Arbeit des Herrn Stahl, Crelle's Journal, Bd. 95, S. 287.

**) Crelle's Journal, Bd. 91, S. 1.